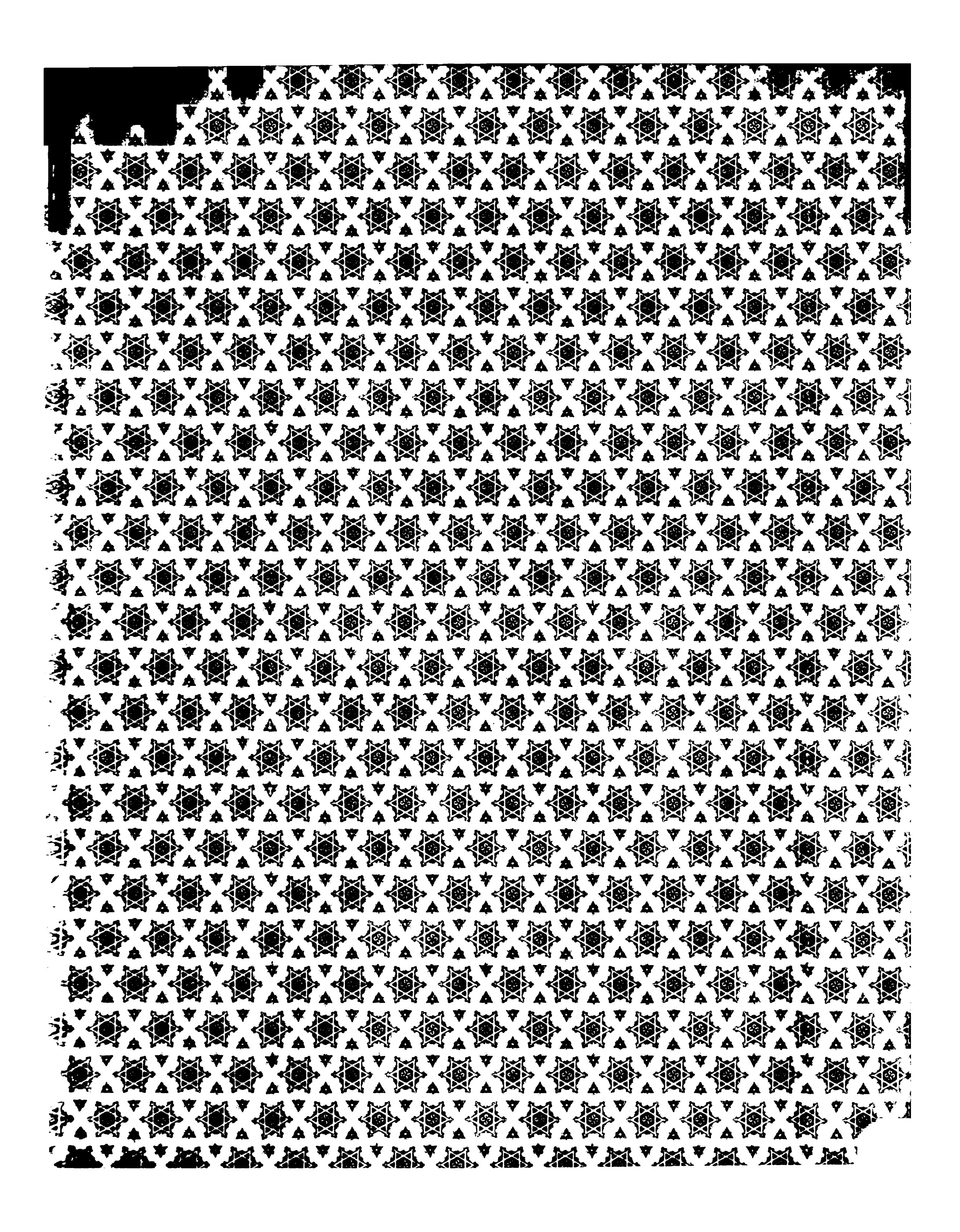





1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



Ausgewählte Kapitel

der

Zahlentheorie I.

Vorlesung,

gehalten im Wintersemester 1895/96

von

F. Klein.

Ausgearbeitet von A. Sommerfeld.

GÖTTINGEN 1896.



Inhaltsverzeichniss.





Absicht dieser Vorlesung ist es, *die Theorie der binären quadratischen Formen in geometrischem Gewande zu entwickeln.* Dabei wünschen wir nicht, für unsere geometrische Auffassung der Theorie den prinzipiellen Vorrang gegenüber einer rein arithmetischen Behandlung in Anspruch zu nehmen. Unsere Meinung ist es vielmehr, daß *anschauliches Erfassen und logische Behandlungsweise der Mathematik sich nicht ausschliessen, sondern gegenseitig unterstützen sollen.* In diesem Sinne werden wir in dem parallel laufenden Seminar dieselbe Theorie unter wesentlicher Mitwirkung von Hilbert mehr von ihrer

arithmetischen Seite her studiren.

Indem wir uns sogleich in medias res versetzen, schreiben wir den allgemeinen Ausdruck einer binären quadratischen Form folgendermassen an: $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$.

Für die Zwecke der Zahlentheorie sind die Veränderlichen x und y (ebenso wie die Coefficienten a, b, c) ganze Zahlen. Wir werden also bei geometrischer Auffassung dazu geführt, in der x, y-Ebene die ganzzahligen Punkte zu markiren. Wir legen irgend ein System von Parallelcoordinaten zu Grunde; dasselbe braucht nicht gerade rechtwinklig zu sein, auch kann der Maassstab, mit dem wir auf der x- und y-Axe messen verschieden sein. Durch die Punkte $x = 1, 2, 3 \ldots$ der x Axe, bez. die Punkte $y = 1, 2, 3 \ldots$ der y-Axe ziehen wir Parallelen zu den Coordinatenaxen und erhalten die Figur eines Parallelgitters. Die Eckpunkte desselben, die „Gitterpunkte", liefern uns die ganzzahligen Punkte der Ebene. Wenn wir unsere Aufmerksamkeit nur auf diese richten und von den verbindenden Graden absehen, sprechen wir von einem Punktgitter.

Eine erste Frage, die wir zu erledigen haben, ist diese: Auf wie viel Arten ist es möglich, ein Punktgitter als Parallelgitter aufzufassen?

Wir denken uns die beiden durch den Nullpunkt verlaufenden Geraden eines ev. neuen Parallelgitters als Axen eines neuen x'; y' - Systems und wählen als Maasseinheit auf den neuen Axen die Entfernung des auf der betr. Axe gelegenen nächsten Punktes vom Nullpuncte. Sollen beide Parallelgitter, das neue und das alte, zu demselben Punktgitter gehören, so müssen den sämtlichen ganzzahligen Punkten des x; y-Systemes ganzzahlige Punkte im x'; y'-System entsprechen und umgekehrt. Wir können daher unsere ursprüngliche Aufgabe analytisch folgendermassen aussprechen:

Es sollen alle möglichen Transformationsformeln:

$$x = \alpha x' + \beta y'$$
$$y = \gamma x' + \delta y'$$

von der Beschaffenheit aufgesucht werden, dass zu ganzzahligen Werten von x, y ganzzahlige Werte von x', y' gehören und umgekehrt.

Unter den Coordinatentransformationen der vorstehenden Form nimmt der Fall $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ eine Ausnahmestellung ein. Wir schliessen denselben hier aus. Im Übrigen unterscheiden wir die Transformation als gleichstimmig oder ungleichstimmig, je nachdem $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$ oder $\alpha\delta - \beta\gamma < 0$ ist. Im ersteren Falle ist der Sinn der Drehung, durch welche die positive x-Axe in die positive y-Axe, bez. die positive x'-Axe in die positive y'-Axe auf dem kürzesten Wege übergeführt wird, derselbe, im zweiten Falle der entgegengesetzte.

Aus der Bedingung, dass den ganzzahligen Punkten x', y' ganzzahlige Punkte x, y entsprechen sollen, folgt zunächst, indem wir $x' = 1$, $y' = 0$ bez. $x' = 0$, $y' = 1$ nehmen, dass die Substitutionscoefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen sein müssen. Sodann lösen wir nach x' und y' auf:

$$x' = \frac{\delta x - \beta y}{\alpha\delta - \beta\gamma}, \quad y' = \frac{-\gamma x + \alpha y}{\alpha\delta - \beta\gamma};$$

aus der Bedingung, dafs auch den ganzzahligen Werten x, y ganzzahlige Werte x', y' entsprechen sollen, folgt in derselben Weise, dafs auch die folgenden Grössen

$$\frac{\alpha}{\alpha\delta-\beta\gamma}, \quad \frac{\beta}{\alpha\delta-\beta\gamma}, \quad \ldots,$$

bez. ganzen Zahlen (a, b, c, d) gleich sein müssen.

Wir haben also die Gl.

$$\alpha = a(\alpha\delta-\beta\gamma),$$
$$\beta = b(\alpha\delta-\beta\gamma),$$
$$\gamma = c(\alpha\delta-\beta\gamma),$$
$$\delta = d(\alpha\delta-\beta\gamma),$$

aus denen sich durch geeignete Multiplication ergibt:

$$(\alpha\delta-\beta\gamma) = (ad-bc)(\alpha\delta-\beta\gamma)^2$$

oder

$$1 = (ad-bc)(\alpha\delta-\beta\gamma).$$

Da die rechts stehenden Factoren ganze Zahlen sind, müssen sie beide entweder gleich $+1$ oder gleich -1 sein. Wir gewinnen also das Resultat: Die Determinante unserer Transformation $\alpha\delta-\beta\gamma$ muss gleich ± 1 sein. Umgekehrt sieht man, dafs dann wirklich unsere Transformation die verlangten Eigen-

schaften besitzt.

Fr. d. 25. X. Die Determinante $(\alpha\delta - \beta\gamma)$ hat eine einfache geometrische Bedeutung. Construiren wir uns das „Fundamentalparallelogramm" des transformirten Gitters, indem wir die Verbindungsstrecken des Nullpunktes mit den Punkten $x' = 1, y' = 0$ und $x' = 0, y' = 1$ zu einem Parallelogramm vervollständigen. Die letzteren haben im x, y - Systeme die Coordinaten $x = \alpha, y = \gamma$ bez. $x = \beta, y = \delta$. Der Inhalt des transformirten Fundamentalparallelogramms ist also gerade gleich der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ vorausgesetzt, dass wir den Inhalt des ursprünglichen Elementarparallelogramms $= 1$ setzen.

Mithin sagt die Gleichung $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$ aus, dass der Flächeninhalt des neuen Elementarparallelogramms gleich 1, d.h. ebenso gross, wie der des alten ist.

In dieser geometrischen Fassung ist der Satz, dass bei unserer Fragestellung $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ wird, eigentlich selbstverständlich, wie die folgende Betrachtung zeigt, die wir hier nur im allgemei-

nen Umriss skizziren. Die Anzahl der Elementarparallelogramme ist ebenso gross, wie die Anzahl der Gitterpuncte; denn wir können jedem Gitterpuncte ein anstossendes Parallelogramm zuordnen und umgekehrt. Die Anzahl der Gitterpuncte, also auch die der Elementarparallelogramme ist hiernach in beiden Gittern dieselbe. Wir teilen nun durch die beiden Gitter dieselbe Grösse (nämlich den Inhalt der ganzen Ebene) in dieselbe Anzahl unter sich gleicher Theile (einzelner Parallelogramme) ein. Mithin werden diese Teile bei beiden Einteilungen gleich gross ausfallen. – Diese Überlegung kann und muss natürlich präcisirt werden, wie solches im Seminar geschehen wird.

Die Frage nach den möglichen Parallelgittern führte uns auf die Untersuchung der Gleichung $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$. Ohne Weiteres zeigt sich dass α und γ, ebenso β und δ etc. <u>relativ prim</u> gewählt werden müssen. Ersteres heisst geometrisch, dass die erste Seite des

neuen Fundamentalparallelogramms im Innern keine Gitterpuncte enthalten darf. Dies vorausgesetzt, wollen wir zeigen, daſs man zu beliebig gegebenem α und γ allemal Zahlen β und δ (u. s. w. unendlich viele Zahlen) finden kann, welche unserer Gleichung genügen, oder anders ausgedrückt, daſs man zu einer beliebig im Gitter gezogenen ersten Strecke, welche in ihrem Innern keinen Gitterpunkt trägt, eine zweite so bestimmen kann, daſs das entstehende Parallelogramm den Flächeninhalt 1 hat.

Zunächst zeigt sich, daſs, wenn ein solches Zahlenpaar (β', δ') gefunden ist, sogleich unendlich viele (und damit alle überhaupt existirenden) angegeben werden können. Sei nämlich

$$\alpha\delta' - \beta'\gamma = 1.$$

Wir subtrahiren davon die Gl. $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ und finden als Bedingung für β und δ die Gl:

$$\alpha(\delta - \delta') = \gamma(\beta - \beta').$$

Da α und γ als relativ prim vorausge-

setzt werden, so muss, unter m eine ganze Zahl verstanden, jede Lösung unserer Gl. die Form haben:

$$\beta - \beta' = m\alpha, \quad \delta - \delta' = m\gamma$$

oder

$$\beta = \beta' + m\alpha, \quad \delta = \delta' + m\gamma.$$

Dieser Schluss beruht wesentlich auf den elementaren Teilbarkeitsgesetzen der ganzen Zahlen. Umgekehrt erkennt man, dass die vorstehenden Werte von β und δ bei beliebigem m unserer Gleichung genügen. Wir haben also die allgemeinste Lösung der vorliegenden „Diophantischen Gleichung ersten Grades" aus einer speziellen Lösung abgeleitet.

Um eine einzelne Lösung β', δ' zu finden, dazu dient uns der „Euklidische Algorithmus". Derselbe hat zunächst den Zweck, den grössten gemeinsamen Teiler zweier gegebener Zahlen a_1 und a_2 zu berechnen. Wir setzen an:

$$a_1 = \mu_1 a_2 + a_3$$
$$a_2 = \mu_2 \mu_3 + a_4$$
$$a_3 = \mu_3 a_4 + a_5$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Hier sind $a_3, a_4, \ldots, \mu_1, \mu_2 \ldots$ lauter positive ganze Zahlen, von denen wir die letzteren jedesmal so gross wie möglich wählen. Wir machen nun den specifisch zahlentheoretischen Schluss, dass in der Reihe der abnehmenden Zahlen $a_3, a_4, \ldots$ schliesslich die Null auftreten muss, dass also das Euklidische Verfahren abbricht. Die letzten Gleichungen mögen lauten:

$$a_{n-2} = \mu_{n-2} \; a_{n-1} + a_n,$$

$$a_{n-1} = \mu_{n-1} \; a_n.$$

Indem wir diese Gleichungen einmal von vorwärts nach rückwärts und einmal von rückwärts nach vorwärts lesen, erkennen wir, dass a_n der grösste gemeinsame Teiler von a_1 und a_2 ist. In dem besonderen Fall, wo a_1 und a_2 relativ prim sind, muss a_n gleich 1 sein.

Wir brauchen den Euklidischen Algorithmus nur etwas umzuordnen, um zu der gewöhnlichen <u>Kettenbruchentwickelung</u> des Quotienten a_1/a_2 zu gelangen: Es wird:

$$\frac{a_1}{a_2} = \mu_1 + \cfrac{1}{\mu_2 + \cfrac{1}{\mu_3 + \cdots + \cfrac{1}{\mu_{n-1}}}}.$$

Um anzudeuten, daß die Kettenbruchentwickelung auch auf irrationale Zahlen ausgedehnt werden kann, schreiben wir ω an Stelle von a_1/a_2 und setzen die folgenden Gleichungen an:

$$\omega = \mu_1 + x_1$$
$$\frac{1}{x_1} = \omega_1 = \mu_2 + x_2$$
$$\frac{1}{x_2} = \omega_2 = \mu_3 + x_3$$

$$\omega = \mu_1 + \cfrac{1}{\mu_2 + \cfrac{1}{\mu_3 + \dots}}$$

Hier bedeuten die μ_1, μ_2 wieder ganze Zahlen, die $x_1, x_2 \dots$ positive echte Brüche; die ersteren bezeichnet man als Teilnenner, die letzteren wollen wir Teilreste nennen. Brechen wir den Kettenbruch an einer beliebigen Stelle ab, so erhalten wir einen „Näherungswert" für die Zahl ω. Die Näherungswerte sind rationale Brüche von der Form $\frac{p}{q}$. Wir haben

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{\mu_1}{1}$$
$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{\mu_1\mu_2 + 1}{\mu_2}$$

$$\frac{p_3}{q_3} = \frac{\mu_1\left(\mu_2 + \frac{1}{\mu_3}\right) + 1}{\mu_2 + \frac{1}{\mu_3}} = \frac{\mu_1\mu_2\mu_3 + \mu_1 + \mu_3}{\mu_2\mu_3 + 1} \quad \text{etc.}$$

Von den Näherungsbrüchen gehen wir zu Näherungspaaren über, indem wir

die ersteren je in einen Zähler und Nenner spalten, die relativ prim zu einander sind. Die ersten Näherungspaare werden sein.

$p_1 = \mu, \quad q_1 = 1$

$p_2 = \mu_1\mu_2 + 1, \quad q_2 = \mu_2.$

Die Reihe der Näherungspaare setzen wir noch nach rückwärts in geeigneter Weise fort, indem wir definiren:

$p_0 = 1, \quad q_0 = 0$

$p_{-1} = 0, \quad q_{-1} = 1.$

Do. d. 31. X. Zwischen den aufeinander folgenden Näherungsbrüchen besteht nun die folgende einfache Recursionsformel:

$$1) \quad \frac{p_r}{q_r} = \frac{\mu_r p_{r-1} + p_{r-2}}{\mu_r q_{r-1} + q_{r-2}}.$$

Wir beweisen dieselbe durch vollständige Induction, nehmen also an, daß dieselbe Formel für den $(r-1)^{ten}$ Näherungsbruch richtig sei, daß also:

$$\frac{p_{r-1}}{q_{r-1}} = \frac{\mu_{r-1} p_{r-2} + p_{r-3}}{\mu_{r-1} q_{r-2} + q_{r-3}} \text{ sei.}$$

Nun entsteht doch der $(r-1)^{te}$ Näherungsbruch, wenn wir den Kettenbruch mit der Zahl μ_{r-1}, der r^{te}, wenn wir

ihn mit der Zahl a_r abbrechen. Der $r$te Näherungsbruch, können wir auch sagen, entsteht aus dem $(r-1)$ten, wenn wir a_{r-1} durch $a_{r-1}+\frac{1}{a_r}$ ersetzen.
Thun wir dieses in der Formel für $\frac{p_{r-1}}{q_{r-1}}$, so ergiebt sich, da $p_{r-2}, q_{r-2}, p_{r-3}, q_{r-3}$ die Zahl a_{r-1} nicht mehr enthalten:

$$\frac{p_r}{q_r} = \frac{\left(a_{r-1}+\frac{1}{a_r}\right)p_{r-2}+p_{r-3}}{\left(a_{r-1}+\frac{1}{a_r}\right)q_{r-2}+q_{r-3}} = \frac{a_r p_{r-1}+p_{r-2}}{a_r q_{r-1}+q_{r-2}}.$$

Berücksichtigt man noch, daß die Formel 1) für $r=1$ richtig ist, so ist sie damit für jedes r bewiesen.

Wir zeigen ferner, daß die Recursionsformel nicht nur für die *Näherungsbrüche*, sondern auch für die *Näherungspaare* besteht, daß also:

$$2)\quad \begin{aligned} p_r &= a_r p_{r-1}+p_{r-2} \\ q_r &= a_r q_{r-1}+q_{r-2}. \end{aligned}$$

Letzteres wird dann zutreffen, wenn die rechten Seiten von 2) relativ prim sind. Wir bezeichnen dieselben vorläufig mit p_r', q_r' und haben dann:

$$(p_r' q_{r-1} - q_r' p_{r-1}) = -(p_{r-1} q_{r-2} - q_{r-1} p_{r-2})$$

Durch die wiederholte Ausführung der

selben Rechnung folgt

$(p'_r q_{r-1} - q'_r p_{r-1}) = (-1)^r (p_0 q_{-1} - q_0 p_{-1}) = (-1)^r.$

p'_r und q'_r können also keinen gemeinsamen Teiler haben; es ist daher wirklich $p_r = p'_r$, $q_r = q'_r$ und die Formel 2) ist bewiesen.

Die gleichzeitig bewiesene Relation:

3) $p_r q_{r-1} - q_r p_{r-1} = (-1)^r$

wird als <u>Determinantensatz der Kettenbrüche</u> bezeichnet.

Nach 2) ergiebt sich p_r aus p_{r-2} durch μ_r - malige Hinzufügung von p_{r-1} etc. Bei diesem Verfahren liegt es nahe, zwischen das $r-2^{te}$ und das r^{te} Näherungspaar noch die folgenden Zahlenpaare einzuschalten:

2') $\begin{matrix} \rho p_{r-1} + p_{r-2} \\ \rho q_{r-1} + q_{r-2} \end{matrix} \quad (\rho = 1, 2, \dots (\mu_r - 1)),$

welche man offenbar auch so schreiben kann:

2') $\begin{matrix} p_r - \sigma p_{r-1} \\ q_r - \sigma q_{r-1} \end{matrix} \quad (\sigma = 1, 2, \dots (\mu_r - 1)).$

Diese bezeichnen wir als <u>Nebennäherungspaare</u>, die früheren im Gegensatz dazu

auch als <u>Hauptnäherungspaare</u>.

Endlich drücken wir noch die zu entwickelnde Größe w selbst recurrent mit Benutzung der Teilreste r_r aus. Es war ja

$$w = u_1 + \frac{1}{u_2} + \cdots \frac{1}{u_r + r_r}$$

w entsteht also aus $\frac{p_r}{q_r}$, wenn wir hier $u_r + r_r$ statt u_r eintragen; mithin haben wir

$$4)\quad w = \frac{p_r + r_r\, p_{r-1}}{q_r + r_r\, q_{r-1}}.$$

Wir benutzen diese Formel, um uns ein Urtheil über die Abweichung des r^{ten} Näherungsbruches von w_r zu verschaffen. Wir haben:

$$5)\quad w - \frac{p_r}{q_r} = \frac{r_r(-1)^{r-1}}{q_r(q_r + r_r\, q_{r-1})}.$$

Die Abweichung wird immer kleiner, je weiter wir in der Reihe der Näherungsbrüche vorwärts gehen; denn der Nenner wächst mit wachsendem r, während der Zähler ein echter Bruch ist. Vor Allem aber sehen wir: <u>Die aufeinanderfolgenden Näherungsbrüche sind abwechselnd grös-</u>

ser und kleiner als w; genauer gesagt, sind die Näherungsbrüche gerader Ordnung grösser, die ungerader Ordnung kleiner als w.

Nach diesen Entwickelungen kommen wir auf unseren Ausgangspunkt, nämlich auf die Gleichung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

zurück; hier waren α und γ gegebene relativ prime Zahlen, β und δ sollte gefunden werden. Zu dem Zwecke entwikkeln wir $\frac{\alpha}{\gamma}$ in einen Kettenbruch; derselbe bricht an einer gewissen Stelle (der n ten) ab, so dass

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{p_n}{q_n}$$

Da Zähler und Nenner auf beiden Seiten dieser Gleichung relativ prim sind, haben wir auch

$$\alpha = p_n, \quad \gamma = q_n.$$

Nehmen wir noch das vorletzte Näherungspaar p_{n-1}, q_{n-1} hinzu, so gilt nach 3) die Gleichung:

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^n.$$

Daher erhalten wir eine Lösung unserer

Gleichung, indem wir setzen

$$\beta = (-1)^n p_{n-1}, \quad \delta = (-1)^n q_{n-1}$$

Die Kettenbruchentwickelung liefert uns also in ihrem vorletzten Näherungspaar (ev. bis auf das Vorzeichen) **die gesuchte Lösung der Diophantischen Gleichung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.**

Der Tendenz dieser Vorlesung entsprechend fragen wir uns: was bedeuten alle diese Dinge geometrisch? Wir gewinnen dadurch ein lebhafteres Bild, als es die abstracten Formeln geben können.

Wir ziehen in unserem Gitter die Gerade $\omega = \frac{x}{y}$ u. markiren die Näherungspunkte von ω, d.h. die Gitterpunkte mit den Coordinaten p_ν, q_ν. Von den Hauptnäherungspunkten liegen nach

Gleichung 5) diejenigen mit geradem Index auf der Rechten, die mit ungeradem auf der Linken der w – Geraden. Desgleichen liegen die Nebennäherungspuncte, welche zwischen zwei Hauptnäherungspunkten mit geradem Index eingeschaltet sind, auf der rechten, die anderen auf der linken Seite.

Wir verbinden jeden der Näherungspunkte mit dem Nullpunkte O. Die Verbindungsstrecke des r ten Näherungspunktes heisse l_r. Speciell sind l_1 und l_0 zwei auf der x resp. y - Axe aufgetragene Strecken von der Länge 1. Jeder Strecke l_r kommt eine gewisse Richtung und Grösse zu. Es ist nun namentlich von der Mechanik her bekannt, dass man mit Strecken eine Operation vornehmen kann, welche man passend als Addition bezeichnet. Zwei Strecken addiren heisst: Den Anfangspunkt der einen an den Endpunkt der anderen ansetzen. Das Resultat der Addition ist die vom Anfangspunkte dieser nach dem Endpunkte jener

-gezogene Verbindungsstrecke. Der moderne Name für Streckenrechnung ist Vectoranalysis.

Frei. d. 1. XI. Auf diese Streckenrechnung weisen uns unsere Recursionsformeln hin. Wir behaupten: <u>es entsteht der Vector l_r des r^{ten} Hauptnäherungspunktes aus dem Vector l_{r-2}, wenn wir zu diesem den Vector l_{r-1} μ_r-mal addiren, und: es entsteht der Vector l eines Nebennäherungspunktes, wenn wir zu l_{r-2} den Vector l_{r-1} ϱ-mal addiren.</u> Oder, in den Symbolen der Streckenrechnung ausgedrückt:

$$l_r = l_{r-2} + \mu_r l_{r-1} \text{ bez.}$$
$$l = l_{r-2} + \varrho\, l_{r-1}.$$

In der That sind diese Gleichungen nichts anderes als unsere früheren Gleichungen 2) und 2'). Spalten wir sie nämlich in „Componenten" d. h. projiciren wir die Strecken auf die x- und y-Axe, so ergeben sich gerade jene Recursionsformeln.

Wir wollen auch der Geraden w einen Vector (L) zuordnen, welcher der Gl. (4) entsprechend gegeben ist durch

4') $\mathfrak{L} = l_r + r_r\, l_{r-1}$.

Nun können wir die Reihe der successiven Näherungspunkte nach folgender Regel geometrisch bestimmen. Wir beginnen in dem Punkte $p_1, q-1$ und setzen an diesen die Strecke l_0 μ_1-mal an. Wir kommen dadurch zu $p_1 q_1$; die Verbindungsstrecke von O nach $p_1 q_1$ ist l_1. Dann gehen wir zum Punkte $p_0 q_0$ über und tragen an diesen die Strecke l_1 μ_2-mal an, wodurch wir nach $p_2 q_2$ gelangen. Die Strecke von O nach $p_2 q_2$ heisst l_2. Jetzt tragen wir an $p_1 q_1$ μ_3-mal die Strecke l_2 ab u. s. f. Jedesmal ziehen wir die Geraden, welche von dem $r$ten nach dem $(r+2)$ten Näherungspunkt führen, aus. Zusammen bilden sie zwei Polygonzüge, einen rechten und einen linken. Die Ecken derselben sind die Hauptnäherungspunkte. Die Nebennäherungspunkte aber sind einfach die sonstigen auf den Polygonzügen gelegenen Gitterpunkte. Betrachten wir nämlich die Polygonseite, welche von p_{r-2}, q_{r-2} nach p_r, q_r hinführt. Dieselbe läuft der

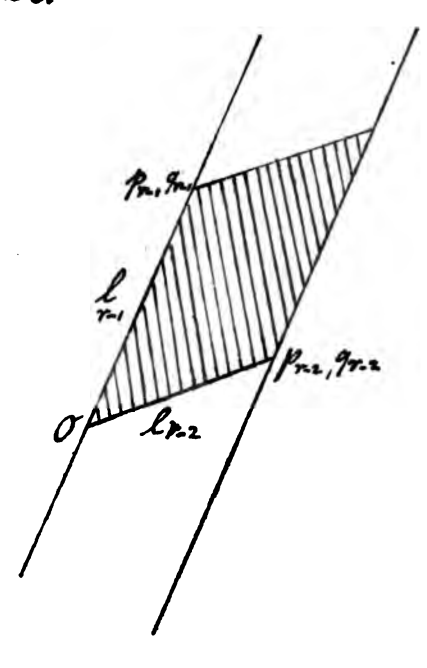
Strecke l_{r-1} parallel. Die Strecke l_{r-1} selbst enthält in ihrem Innern keinen Gitterpunkt; es bedeutet dieses nichts Anderes, als wenn wir oben sagten: Die Zahlen p_{r-1}, q_{r-1} sind relativ prim. Desgleichen können wir bei einmaligem Abtragen von l_{r-1} an p_{r-1}, q_{r-2} keinen Gitterpunkt treffen. Wohl aber ist der Endpunkt der abgetragenen Strecke ein Gitterpunkt u. zw. der erste zwischen dem $(r-2)$ten und $r$ten Hauptnäherungspunkt eingeschaltete Nebennäherungspunkt. Indem wir so fortfahren sehen wir, dass auf unserer Polygonseite im Ganzen $u_r - 1$ Gitterpunkte liegen, und dass dieses gerade die $u_r - 1$ zwischen $(r-2)$ und (r) eingeschalteten Nebennäherungspunkte sind.

Die Zahlen u_r haben wir bisher stillschweigend aus der Rechnung übernommen. Es erübrigt noch, auch diese geometrisch zu bestimmen. Das gelingt, wenn wir die ω – Linie, welche sich zwischen unsern Polygonzügen hindurchzieht, berücksichtigen.

Die Gleichung 4) zeigt, dass, wenn wir von p_{r-2}, q_{r-2} den Vector l_{r-1}, statt u_r-mal (u_r+1) mal antragen, wir die ω-Linie passiren würden. In der That dürfen wir nach jener Gleichung an l_r nur einen Bruchteil (r_r) von l_{r-1} ansetzen, um in einen Punkt von ω zu gelangen. Mithin bedeutet u_r das grösste Multiplum von l_{r-1}, welches ich zum Punkte $(r-2)$ addiren darf, ohne die ω-Gerade zu treffen. Dieses die geometrische Definition der Zahlen u_r!

Unsere Beschreibung der Polygonzüge ist aber bisher noch recurrent und daher nicht sehr übersichtlich. Wir erhalten sie mit einem Schlage, wenn wir folgende Betrachtungen anstellen, bei denen wir uns ω zuvörderst als irrationale Grösse denken, so dass die beiden Polygonzüge auf den beiden Seiten der ω Linie in's Unendliche laufen: Das Parallelogramm, welches O zu einer Ecke und l_{r-2}, l_{r-1} zu Seiten hat, ist ein <u>Elementarparallelogramm</u>; Der Flächeninhalt desselben beträgt

nämlich 1 /nach dem Determinantensatze der Kettenbrüche (s. Gl. 3)) und seine Ecken sind Gitterpunkte. Dasselbe kann in seinem Innern keinen Gitterpunkt enthalten; sonst könnten wir nämlich nicht, wie es nach der Definition der Elementarparallelogramme möglich sein muß, durch Verschiebung desselben ein Parallelgitter erhalten, welches sämtliche Gitterpunkte der Ebene zu Eckpunkten hat. Aus unserem Elementarparallelogramm erhalten wir nun durch fortgesetzte Aneinanderreihung congruenter Parallelogramme (vergl. die Figur) einen „Elementarstreifen". Dieser kann ebenso wenig wie das einzelne Parallelogramm einen Gitterpunkt im Innern



enthalten. Nun fassen wir den in der vorhergehenden Figur von unsern beiden Polygonzügen eingeschlossenen Raum in's Auge. Dieser lässt sich in einzelne (übrigens wechselweise übereinander greifende) Stücke von Elementarstreifen zerlegen. <u>Daher findet sich auch zwischen unsern Polygonzügen kein einziger Gitterpunkt.</u>

Nun zerlegt unsere w- Gerade die Gitterpunkte des Quadranten zwischen der positiven x- und y- Axe in zwei Klassen, in solche, welche links, und solche, welche rechts von der w- Geraden liegen. Betrachten wir den von den ersteren gebildeten Punkthaufen. Sein <u>Umrisspolygon</u> besteht zunächst aus der positiven y Axe von $y = \infty$ bis $y = 1$; <u>des Weiteren ist das Umrisspolygon identisch mit unserem linken Polygonzuge.</u> Der grösseren Anschaulichkeit wegen, können wir etwa in den Gitterpunkten dieses Haufens Stifte befestigt denken und einen Faden um die Gesamtheit dieser Stifte

herumschlingen. Straff gezogen nimmt derselbe genau die Gestalt unseres linken Polygonzuges an. In derselben Weise verfahren wir mit dem rechts von der ω-Geraden gelegenen Punkthaufen. Sein Umrisspolygon bez. ein herumgeschlungener Faden liefert uns den rechten Polygonzug. Dies ist die einfache hier zu gebende Definition, von der wir in der Folge vielfach Gebrauch machen werden.

Do. d. 8. XI. Wir haben noch anzugeben, welche Besonderheiten eintreten, wenn wir ω gleich einer rationalen Grösse $\frac{\alpha}{\gamma}$ annehmen. Die ω-Linie zerlegt die Gitterpunkte zwar wiederum in zwei Klassen, in links bez. rechts gelegene Punkte. Dabei bleiben aber noch die Gitterpunkte auf der ω-Linie selbst übrig, welche wir nach Belieben der einen oder anderen Klasse zurechnen können. Thun wir das erstere (fig. 1), so müssen wir zu unserm linken Umrisspolygon das Stück der ω-Geraden von dem letzten Näherungs-

punkte ($p_n, q_n = \alpha, \gamma$) bis ∞ hinzurechnen. Das rechte Umrisspolygon läuft dann nach unserer geometrischen Construction gleichfalls in eine unendlich lange Strecke aus, welche von p_{n-1}, q_{n-1} parallel zur ω Geraden in's Unendliche reicht. Rechnen wir aber den rationalen Punkt α, γ und die Vielfachen desselben ($m\alpha, m\gamma$) zu den rechts von ω gelegenen Punkten, so enthält das rechte Polygon die unendlich lange Seite α, γ bis ∞, während das linke Poly-

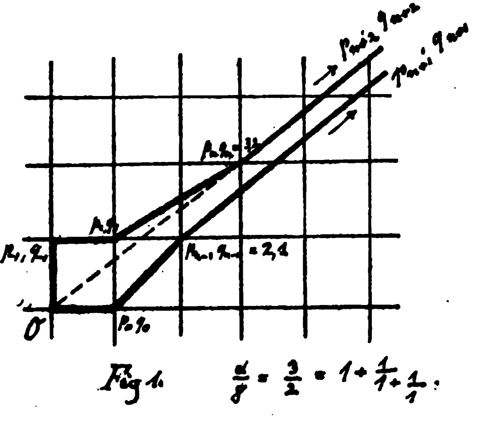


Fig. 1. $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}$

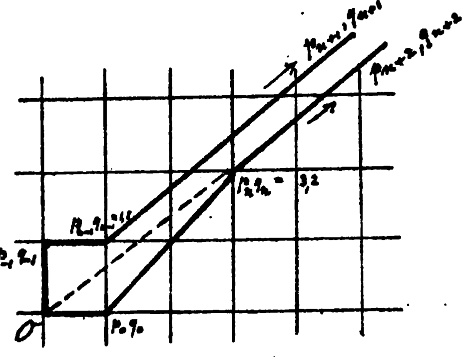


Fig. 2. $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$

gon die Seite p_{r-2}, q_{r-2} bis ∞ bekommt, welche der w-Geraden parallel ist. Beidemal liegt zwischen den Polygonzügen ein Elementarstreifen, im ersten Falle rechts, im zweiten links von der □-Linie.

Die geometrische Construction des Kettenbruches führt uns so noch etwas weiter, als die ursprüngliche Berechnung, in dem sie uns in den unendlich fernen Ecken der Polygone noch zwei neue Näherungspunkte liefert. Wir haben somit, wie oben an den Anfang des Kettenbruches die Näherungspunkte p_0, q_0 und p_{-1}, q_{-1}, jetzt auch an das Ende desselben zwei ergänzende Näherungspunkte, p_{n+1}, q_{n+1} und p_{n+2}, q_{n+2} hinzugefügt, welche beide im Unendlichen liegen. Wir können auch arithmetisch zu ihnen gelangen, wenn wir uns das Abbrechen des Kettenbruches dadurch hervorgebracht denken, daß auf den Teilnenner μ_n eine Zahl $\mu_{n+1} = \infty$ folgt. Halten wir dann die Gültigkeit der Recursionsformeln auch für $r > n$

aufrecht, so ergibt sich der Punkt

$p_{n+1} = \mu_{n+1} p_n + p_{n-1} = \infty$
$q_{n+1} = \mu_{n+1} q_n + q_{n-1} = \infty$ mit $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \omega.$

Dieselben Werte erhalten wir, wenn wir noch μ_{n+2} ganz beliebig wählen, aus der Recursionsformel auch für p_{n+2}, q_{n+2}, was mit unserer Construction übereinstimmt.

Auch die Möglichkeit der zwei verschiedenen Constructionen in Figur 1) und 2) lässt sich leicht arithmetisch begreifen. Haben wir nämlich einen Kettenbruch mit $\mu_n > 1$, so können wir

statt $\frac{\alpha}{\gamma} = \mu_1 + \cfrac{1}{\mu_2 + \cdots \cfrac{1}{\mu_n}}$ schreiben $\frac{\alpha}{\gamma} = \mu_1 + \cfrac{1}{\mu_2 + \cdots \cfrac{1}{(\mu_n - 1) + \frac{1}{1}}}$

haben wir aber $\mu_n = 1$, so können wir

für $\frac{\alpha}{\gamma} = \mu_1 + \cfrac{1}{\mu_2 + \cdots \cfrac{1}{\mu_{n-1} + \frac{1}{1}}}$ setzen $\frac{\alpha}{\gamma} = \mu_1 + \cfrac{1}{\mu_2 + \cdots \cfrac{1}{(\mu_{n-1} + 1)}}$

Wir haben es also allemal in der Hand, durch diese kleine Umänderung dem Kettenbruch nach Belieben eine <u>gerade oder ungerade Anzahl von Gliedern</u> zu geben. Geben wir ihm eine ungerade

Anzahl, bewirken also, dass n ungerade ist, so gehört p_n, q_n (wie alle Näherungspunkte mit ungeradem Index) zum linken Polygonzuge und wir kommen auf die Figur 2. Geben wir ihm eine gerade Anzahl, so wird p_n, q_n ein Punkt des rechten Polygonzuges, und wir erhalten die Figur 2.

Wir bemerken noch, daß die Annahme α und $\gamma > 0$ keine wesentliche ist. Im entgegengesetzten Falle können wir nämlich dieselben Constructionen in einem der anderen Quadranten ausführen.

Hiernach kommen wir noch einmal auf die Diophantische Gleichung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ zurück. Wir werden die Gesammtheit der Lösungen in zwei Kategorien teilen. Wir können nämlich entweder annehmen, daß

a) $\alpha > \beta$ oder daß b) $\alpha < \beta$,

dann wird auch, von den allerniedersten Fällen, die uns nicht interessiren, abgesehen, gleichzeitig sein:

a) $\gamma > \delta$ bez. b) $\gamma < \delta$.

Um alle Fälle a) aufzuzählen, nehmen

wir α und γ beliebig (natürlich relativ prim) an und entwickeln $\frac{\alpha}{\gamma}$ in einen Kettenbruch von einer <u>geraden Anzahl von Gliedern</u>. Den vorletzten Näherungsbruch nennen wir $\frac{\beta}{\delta}$, während der letzte $\frac{\alpha}{\gamma}$ wird. Dann haben wir $\alpha\delta - \beta\gamma = (-1)^n = +1$ und gleichzeitig (wegen $p_n > p_{n-1}$) $\alpha > \beta$. Um alle Fälle b.) zu gewinnen, nehmen wir β u. δ relativ prim und im Übrigen beliebig an, entwickeln $\frac{\beta}{\delta}$ in einen Kettenbruch von einer <u>ungeraden Gliederzahl</u>; den vorletzten Näherungsbruch nennen wir $\frac{\alpha}{\gamma}$. Dann haben wir $\beta\gamma - \alpha\delta = (-1)^n$ oder $\alpha\delta - \beta\gamma = (-1)^{n+1} = +1$ und gleichzeitig $\alpha < \beta$.

Endlich kommen wir zu unserer Ausgangsfrage zurück: <u>Wie können wir in ein gegebenes Punktgitter Parallelengitter einzeichnen?</u> Als Beziehung zwischen den Coordinaten eines Gitterpunktes im neuen Gitter (x', y') und den Coordinaten desselben Punktes im alten Gitter (x, y) fanden wir früher (pg. 3)

$$x = \alpha x' + \beta y'$$
$$y = \gamma x' + \delta y',$$

wobei $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ sein musste und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze und paarweise relativ prime Zahlen wären. Wir denken sie uns diesen Bedingungen entsprechend irgendwie gegeben. Setzen wir $\frac{x}{y} = \omega$, $\frac{x'}{y'} = \omega'$, so lautet die Beziehung zwischen ω und ω' folgendermassen:

$$\omega = \frac{\alpha\omega' + \beta}{\gamma\omega' + \delta}$$

Diese Beziehung können wir nun auf Grund unserer neuesten Entwickelungen auch in die Gestalt eines Kettenbruches umsetzen. Zum Beweise unterscheiden wir die obigen Fälle a) und b).

Im Falle a) ($\alpha > \beta$) entwickeln wir $\frac{\alpha}{\gamma}$ in einen Kettenbruch:

$$\frac{\alpha}{\gamma} = (\mu_1 + \frac{1}{(\mu_2 + \ddots \frac{1}{(\mu_n}}$$

von einer geraden Gliederzahl. Wir setzen dann, in Übereinstimmung mit den genannten Bedingungen für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, wie oben:

$\alpha = p_n$, $\gamma = q_n$, $\beta = p_{n-1}$, $\delta = q_{n-1}$.
Daneben betrachten wir den folgenden Kettenbruch:

$\alpha)\quad (u_1 + \cfrac{1}{(u_2 + \cdots \cfrac{1}{(u_n + \frac{1}{w'})}}$

Derselbe stimmt in den $n-1$ ersten Gliedern mit dem vorhergehenden über ein. Daher sind auch seine $n-1$ ersten Näherungsbrüche identisch mit denen des vorhergehenden, der n te Näherungsbruch (d. h. der Wert des ganzen Kettenbruches) entsteht aus dem n ten Näherungsbruche des vorhergehenden durch Vertauschung von u_n mit $(u_n + \frac{1}{w'})$. Daher ist der Wert unseres Kettenbruches α) gleich

$$\frac{(u_n + \frac{1}{w'})p_{n-1} + p_{n-2}}{(u_n + \frac{1}{w'})q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{p_n + \frac{p_{n-1}}{w'}}{q_n + \frac{q_{n-1}}{w'}} = \frac{\alpha w' + \beta}{\gamma w' + \delta}.$$

Unser Kettenbruch α) hat also den Wert w.

Im Falle b) $(\alpha < \beta)$ entwickeln wir $\frac{\beta}{\delta}$ in einen Kettenbruch $\frac{\beta}{\delta} = (u_1 + \cfrac{1}{(u_2 + \cdots \cfrac{1}{u_n}}$ von ungerader Gliederzahl n, wobei, wie oben, $\beta = p_n$, $\delta = q_n$, $\alpha = p_{n-1}$, $\gamma = q_{n-1}$ ge-

setzt werden darf. Daneben stellen wir den folgenden Kettenbruch:

$$(a_1 + \cfrac{1}{(a_2 + \ldots \cfrac{1}{(a_n + \omega')}}$$

Sein Wert ist

$$\frac{(a_n+\omega')p_{n-1}+p_{n-2}}{(a_n+\omega')p_{n-1}+q_{n-2}} = \frac{p_n+\omega' p_{n-1}}{q_n+\omega' q_{n-1}} = \frac{\alpha\omega'+\beta}{\gamma\omega'+\delta}$$

Unser Kettenbruch b) hat also wieder den Wert ω. Wir haben also das zusammenfassende Resultat: Ist ω mit einer Grösse ω' verbunden durch die Gl:

$$\omega = \frac{\alpha\omega'+\beta}{\gamma\omega'+\delta},$$

wo zwischen den ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Relation besteht $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$, so kann man die Abhängigkeit der Grösse ω von ω', je nachdem der Fall a) oder b) vorliegt, durch den Kettenbruch a) oder b) darstellen.

Die Rechnungsoperationen, durch welche wir nach den Formeln a) oder b) ω successive aus ω' herstellen, wollen wir nun symbolisch mit Namen belegen. Es bedeute $T\omega'$ den Übergang zum recipro-

ken Werte

$$T\omega' = \frac{1}{\omega'},$$

und $S\omega'$ die Hinzufügung der Einheit

$$S\omega' = \omega' + 1.$$

<u>Dann können wir den Kettenbruch in die folgende symbolische Form schreiben:</u>

$$\omega = S^{\mu_1} T S^{\mu_2} T \dots S^{\mu_n} T \omega' \quad \text{im Falle a)},$$

$$\omega = S^{\mu_1} T S^{\mu_2} T \dots S^{\mu_n} \omega' \quad \text{im Falle b)}.$$

Bei den Formeln ist gemeinsam, daß die Operation T eine gerade Anzahl von Malen (nämlich n mal bez. $n-1$ mal) vorkommt. Dies folgt übrigens mit Notwendigkeit schon daraus, daß die Determinante der Substitution

$$\omega = \frac{\alpha\omega' + \beta}{\gamma\omega' + \delta},$$

welche $+1$ ist, gleich wird dem Produkte aus den Determinanten aller einzelnen Substitutionen S und T. Nun hat S die Determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = +1$ und T die Determinante $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$. Daher muß T eine gerade Anzahl von Malen vorkommen.

Unsere vorstehende symbolische Schreibweise des Kettenbruches enthält einen wichtigen Satz, welchen wir in der

Sprache der Substitutionentheorie folgendermassen aussprechen:

<u>Jede ganzzahlige Substitution $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ von der Determinante 1 lässt sich zusammensetzen, indem man die Operationen S und T als „erzeugende Operationen" in geeigneter Combination und Wiederholung verwendet.</u>

Derselbe Satz gilt natürlich auch, wenn wir von den gebrochenen Substitutionen der ω und ω' übergehen zu den homogenen Substitutionen der Variabeln (x, y) und (x', y'). Auch diese lassen sich aus den Substitutionen:

$$S \left| \begin{matrix} x = x' + y' \\ y = \quad y' \end{matrix} \right| \text{ und } T \left| \begin{matrix} x = y' \\ y = x' \end{matrix} \right|$$

<u>erzeugen nach dem Schema:</u>

$(x, y) = S^{\mu_1} T S^{\mu_2} T \ldots S^{\mu_n} T (x', y')$ im Falle a)

$(x, y) = S^{\mu_1} T S^{\mu_2} T \ldots S^{\mu_n} (x', y')$ " " b).

Frei. d. 9. VII. Diese successive Erzeugung der Substitutionen hat auch eine einfache geometrische Bedeutung. Wir wollen uns dabei auf den Fall a) beschränken, weil der Fall b) ebenso zu behandeln ist. Für unsern Zweck ist es bequem, neben S als

zweite Operation die folgende einzuführen:

$$S' = TST \quad \Big| \; \begin{matrix} x = x' \\ y = x' + y' \end{matrix}$$

Da nun ersichtlich

$$TS^uT \cdot TST \cdot TST \ldots = S'^u$$

so drückt sich unsere Substitution $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ durch die Operation S und S' folgendermassen symbolisch aus:

$$(x,y) = S^{u_1} S'^{u_2} S^{u_3} S'^{u_4} \ldots S^{u_{n-1}} S'^{u_n} (x', y').$$

Um diese Formel geometrisch zu deuten, führen wir den Begriff: „Elementarfigur des Coordinatensystems" ein. Wir verstehen unter der Elementarfigur den Inbegriff zweier Vectoren, des Einheitsvectors der x- und der y-Axe. Bei den Operationen S und S' wird diese Elementarfigur in einfacher Weise geändert. Bei

y-Axe 1,1 0,1 1,0 x-Axe

Operation S;

y-Axe 1,1 0,1 1,0 x-Axe

Operation S'

$$S \left\{ \begin{matrix} x = x' + y' \\ y = y' \end{matrix} \right\}$$

nämlich bleibt der x-Vector ungeändert (der Punkt $x' = 1, y' = 0$ hat im alten System

die Coordinaten $x=1,\ y=0$), der y-Vector dagegen wird geändert u. zw. entsteht der neue y-Vector aus dem alten, indem man zu dem letzteren den x-Vector hinzufügt, (der Punkt $x'=0,\ y'=1$ hat im alten System die Coordinaten $x=1,\ y=1$.) Bei der Operation S' findet das Umgekehrte statt. In gleicher Weise wird S^u bez. S'^u den Übergang von einer Elementarfigur zu einer neuen bedeuten, wobei man zu dem y-(bez x)-Vector u-mal den x-(bez. y-) Vector hinzufügt, während man den x (bez. y-) Vector ungeändert lässt. <u>Durch gesetzmässige Wiederholung solcher Übergänge entsprechend unserer symbolischen</u> Gleichung, entsteht schliesslich die Elementarfigur des x', y' Systems aus der des x, y Systems.

Ein Zahlenbeispiel wird dies erläutern. Es sei

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Da hier vermöge $8 > 5$ der Fall a vorliegt, entwickeln wir $8/3$ in einen Kettenbruch von gerader Gliederzahl

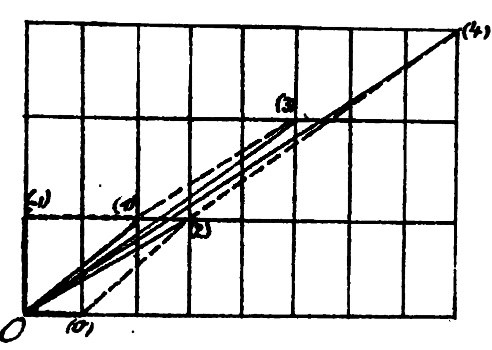
$$\frac{8}{3} = 2 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1}.$$

Unsere Operationsvorschrift lautet daher

$(x, y) = S^2 S^1 S S^1 (x', y')$.

gleichzeitig mit der Kettenbruchentwickelung ziehen wir auch ihr geometrisches Gegenbild, die Umrisspolygone, in Betracht. Im Anschluss an diese verlaufen unsere Operationen folgendermassen:

Die ursprüngliche Elementarfigur besteht aus den Strecken O(0) und O(-1). Die Operation S^2 bedeutet, dass wir die erstere Strecke, den y-Vector, längs der Polygonseite $\overline{(-1)(1)}$ verschieben. Die neue Elementarfigur besteht aus den Strecken O(0), O(1). Der Operation S^1 entsprechend haben wir an den Vector



O(0) den Vector O(1) anzusetzen d. h. wir haben den ersteren längs der Polygonseite $\overline{(0)(2)}$ zu verschieben. Die so entstehende Elementarfigur wird gebildet von O(2) und O(1). Der nächste Schritt führt zu der Figur O(2) und O(3), der letzte endlich zu O(4)

und $O(3)$ d. h. zu der Figur des x', y'-Coordinatensystems.

Wir erkennen: <u>Die Erzeugung der Substitution $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ aus der Wiederholung und Combination der beiden Operationen S, S' kommt darauf hinaus, dass wir die Elementarfigur des neuen Systems aus derjenigen des alten erhalten, indem wir den y- und x-Vector des Coordinatensystems alternirend an den successiven Seiten der beiden zur Kettenbruchentwickelung von $\frac{\alpha}{\gamma}$ gehörenden Umrisspolygone entlang schieben.</u>

Analog natürlich, wenn der Fall b) vorliegen sollte. –

Wir kommen nun zu einer letzten Eigenschaft der Kettenbruchentwickelung, welche von <u>Lagrange</u> in seinen „Additions à l'algèbre d'Euler" 1748, (Werke Bd 7) entwickelt worden ist. Diese Arbeit betrifft ganz besonders die Theorie der Kettenbrüche nach deren Bedeutung für die Zahlentheorie; sie ist in dieser Hinsicht grundlegend gewesen.

Es sei ω irgend eine Zahl, welche wir der Einfachheit wegen als positiv und irrational annehmen. Wir betrachten die „ω-Linie", deren Gleichung $\omega y - x = 0$ ist. Verstehen wir unter x und y ganze Zahlen, so kann die ganzzahlige lineare Form

$$\omega y - x$$

den Wert Null offenbar nicht annehmen. Daher kann man nach einem Minimum von

$$|\omega y - x|$$

fragen. Allerdings wird es ein absolutes Minimum nicht geben können; lässt man nämlich die ganzen Zahlen x und y in geeigneter Weise immer grösser werden, so wird man sich dem Werte 0 unbegrenzt nähern. Lagrange fragt daher nach einem <u>relativen Minimum</u>, d. h. nach solchen ganzen Zahlen x, y, für welche immer

$$|\omega y - x| \leqq |\omega y' - x'|,$$

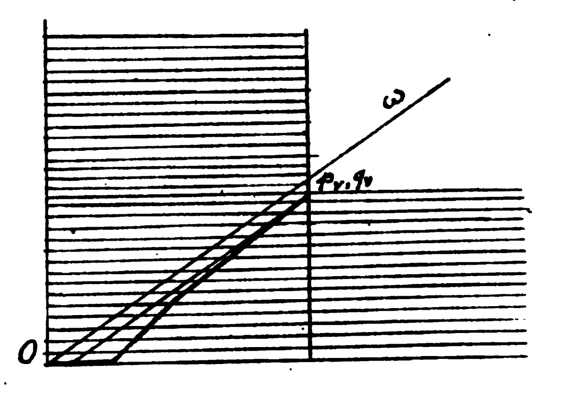
falls nur $y' \leqq y, x' \leqq x$. Bemerkt man, dass in rechtwinkligen x, y-Coordinaten

$$\left| \frac{\omega y - x}{\omega^2 + 1} \right|$$

den Abstand des Punktes x, y von der w-Geraden bedeutet, so kann man die Frage geometrisch folgendermassen stellen: Es soll ein Gitterpunkt x, y gefunden werden, welcher unter allen Gitterpunkten die im Innern oder auf dem Rande des Rechtecks mit den Seiten x, y liegen, den kleinsten Abstand von der w-Linie hat. *Wir werden sehen, daß die Hauptnäherungspunkte $p_r\, q_r$ der Kettenbruchentwickelung und nur diese die in Rede stehende Eigenschaft besitzen.*

Wir wollen übrigens den Punkt p_r, q_r nicht nur mit den Punkten des *Rechtecks*, für welche $x' \leqq x$ *und* $y' \leqq y$ ist, vergleichen, sondern wollen noch die beiden ganzen *Streifen* hinzunehmen, für welche $x' \leqq x$ *oder* $y' \leqq y$ ist. (vergl. die Figur, bei welcher wir $p_r\, q_r$ rechts von w genommen haben). Unsere Be-

hauptung zerfällt in 2 Teile, sie sagt aus:
1.) es liegt in unserem schraffirten Gebiete rechts von der w- Geraden kein Gitterpunkt näher an dieser, als $p_r\ q_r$; 2.) dasselbe findet links von w statt. Der Beweis ad 1.) ist sehr einfach. Wir ziehen durch p_r, q_r eine Parallele zur w- Linie. Es kommen dann nur solche Gitterpunkte für uns in Betracht, welche in dem von dieser Parallelen und der w- Linie aus dem schraffirten Gebiete ausgeschnittenen schmalen Streifen oder auf seiner Begrenzung liegen. Dieser Streifen fällt aber ganz zwischen die w- Linie und unseren rechten



convexen Polygonzug, also in ein Gebiet, in welchem, wie wir wissen, überhaupt kein Gitterpunkt enthalten ist. Also ist p_r, q_r unter allen Gitterpunkten des schraffirten Gebietes rechts

von w der nächste an w.

Der Beweis ad 2) wird insofern ein wenig umständlicher, als wir hier 2 Fälle unterscheiden müssen.

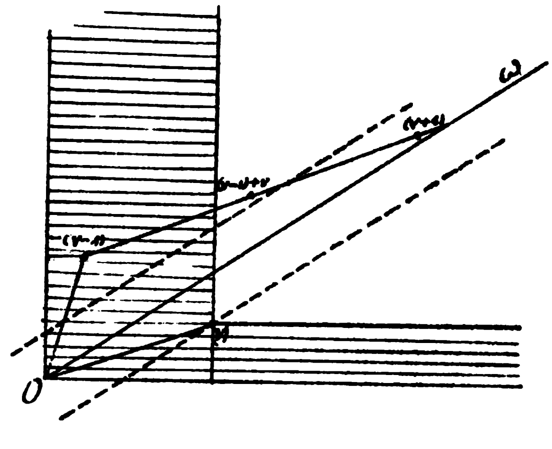
a) Die Polygonseite $(\nu-1)$ bis $(\nu+1)$ enthalte Nebenpunkte der Kettenbruchentwikkelung in ihrem Innern, so dass in der Formel

$$(\nu+1) = (\nu-1) + \alpha_{\nu+1}(\nu)$$

$\alpha_{\nu+1} > 1$ ist.

b) sie enthalte keine Nebenpunkte, wo dann $\alpha_{\nu+1} = 1$ ist.

Wir ziehen jetzt auch links von der ω-Linie eine Parallele zu dieser in demselben Abstande, wie vorher rechts davon. Dieselbe schneidet von der bis ω verlängerten Polygonseite



$(\nu-1)$–$(\nu+1)$ ein Stück von der Länge $O(\nu)$ ab, wie aus unserer Construction der

Umrißpolygone hervorgeht.

Im Falle a) liegt dieses Stück ganz außerhalb des schraffirten Gebietes. Denn es reicht von der ω-Linie noch nicht bis an den letzten Nebenpunkt der Seite $(\nu-1)-(\nu+1)$ heran, und dieser liegt seinerseits ausserhalb des schraffirten Gebietes. Daher fällt der von unserer Parallelen und der ω-Linie begrenzte Streifen, soweit er schraffirt ist, in das Gebiet zwischen die ω-Linie und das linke Umrisspolygon. In diesem Teile des Parallelstreifens kann sich also kein Gitterpunkt befinden.

Im Falle b) schneidet unsere Parallele das Umrißpolygon zwischen den Hauptpunkten $(\nu-1)$ und $(\nu+1)$. Der schraffirte Teil unseres Parallelstreifens greift jetzt möglicherweise noch mit einem kleinen Dreiecke über das Umrißpolygon hinaus. Während

sich für den übrigen Teil die Frage wie vorher erledigt, bleibt dieses Dreieck besonders zu untersuchen. Man setze zu dem Zwecke an die Seite $(\nu-1)-(\nu+1)$ des Elementarparallelogrammes $(O, (\nu-1), (\nu+1), (\nu))$ ein diesem congruentes Parallelogramm an. Unser fragliches Dreieck fällt dann ganz in das Innere des letzteren. In Folge dessen kann es keinen Gitterpunkt enthalten.

Damit ist bewiesen, dass jeder Näherungspunkt $p_\nu\, q_\nu$ ein relatives Minimum von $|\omega y - x|$ liefert.

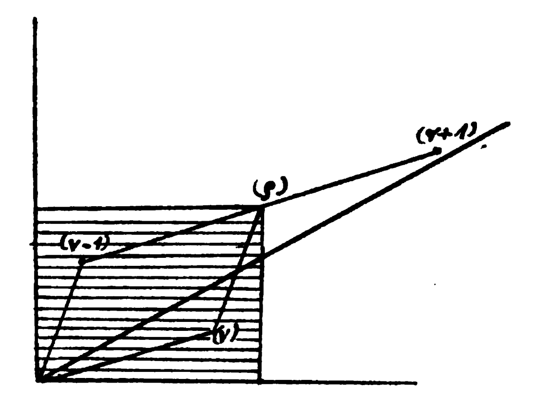
Es bleibt noch umgekehrt zu zeigen, dass jeder Gitterpunkt, welcher diese Eigenschaft besitzt, ein Näherungspunkt u. zw. ein Hauptnäherungspunkt ist.

Wir thun dieses in 2 Schritten und zeigen, dass weder ein Nebenpunkt noch überhaupt irgend ein anderer Gitterpunkt ausserhalb des Umrisspolygons zu einem relativen Minimum Anlass geben kann.

1.) Wir betrachten die zwischen $(\nu-1)$ und $(\nu+1)$ eingeschalteten Nebenpunkte, deren Lage durch

$$(\nu-1) + \varrho\,(\nu), \qquad \varrho = 1, 2, \cdots \mu_{\nu+1}-1$$

bestimmt war. Construiren wir durch irgend einen dieser Nebenpunkte (ϱ) die Parallelen zu den Coordinatenaxen, so enthält das entstehende Rechteck den (ν)ten Hauptpunkt im Innern. Denn nach der vorstehenden Formel werden die Coordinaten von (ϱ) aus denen von

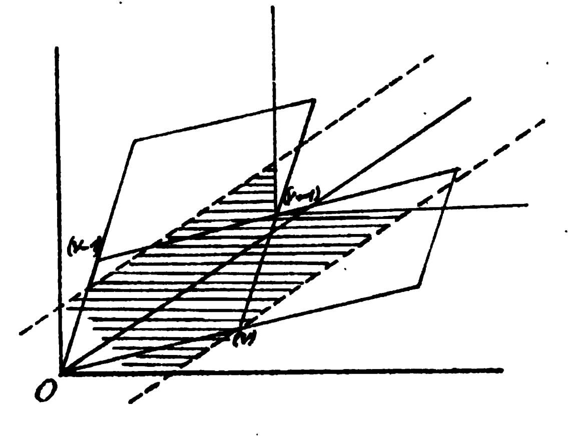


(ν) durch Hinzufügung positiver Stücke erhalten. Überdiess hat (ν) einen kleineren Abstand von ω wie (ϱ). Dies haben wir bereits bei der Figur auf pag 43. gesehen. <u>Also liefert ein Nebenpunkt sicher kein relatives Minimum von $|\omega y - x|$.</u>

2.) Denselben Nachweis erbringen wir für irgend welche <u>Gitterpunkte ausserhalb unserer Polygonzüge.</u> Zu dem Zwecke zeigen wir (was eigentlich viel mehr ist), daß unter allen Punkten, welche näher an ω liegen als (ν) derjenige

mit den kleinsten Coordinaten x, y der Punkt $(\nu+1)$ ist.

Zu beiden Seiten der ω-Linie grenzen wir unsere beiden Parallelstreifen ab, in denen die fraglichen Punkte sämtlich enthalten sein müssen. Sodann ziehen wir durch $(\nu+1)$ Parallelen zur x- und y-Axe. Diese schneiden aus den Parallelstreifen ein Stück aus, welches in der Figur schraffirt ist. Wir haben zu zeigen, dass in diesem Stück ausser (ν) u. $(\nu+1)$ kein Gitterpunkt enthalten ist.



In der That, setzen wir an das Elementarparallelogramm $(0, (\nu-1), (\nu+1), (\nu))$ zwei congruente Parallelogramme längs der Seiten $(\nu-1)(\nu+1)$ und $(\nu)(\nu+1)$ an, so enthalten diese die beiden Zipfel des schraffirten Gebietes, welche über das erste Parallelogramm herausgreifen in ihrem Innern, wie man solches

im Einzelnen auf Grund unserer Construction erkennt. Nun liegen aber im Innern der Elementarparallelogramme sicher keine Gitterpunkte. Also sind (ν) und $(\nu+1)$ die einzigen Gitterpunkte auf schraffirtem Gebiet und <u>$(\nu+1)$ ist unter allen Gitterpunkten, welche näher an ω liegen als (ν), derjenige mit den kleinsten Coordinaten.</u>

Nun zur Betrachtung eines beliebigen Gitterpunktes x, y, welcher nicht einem der Polygonzüge angehört! Die Sache erledigt sich jetzt von selbst. Wir setzen voraus, dass (x, y) ein relatives Minimum von $|\omega y - x|$ ergebe. Unter den Gitterpunkten, welche eine kleinere x bez. y-Coordinate haben, als der Punkt x, y, wird es eine Reihe von Hauptnäherungspunkten geben. Sei (ν) der letzte in dieser Reihe, so dass $p_\nu \leq x$ oder $q_\nu \leq y$, während $p_{\nu+1} > x$, oder $q_{\nu+1} > y$. Nach Annahme ist gleichzeitig $|\omega y - x| < |\omega p_\nu - q_\nu|$. In Folge dessen wäre unter den Gitterpunkten, welche einen kleineren Abstand von ω haben als (ν), nicht $(\nu+1)$

sondern (x, y) derjenige mit den kleinsten Coordinaten. Dies steht aber in Widerspruch mit unserm vorhergehenden Résultat.

Somit ist bewiesen, daß kein anderer Gitterpunkt ein relatives Minimum unserer linearen Form ergeben kann, ausser den Hauptnäherungspunkten der Kettenbruchentwickelung. Es ist also auch die Umkehrung des Lagrange'schen Satzes vollständig dargethan.

Ich möchte im Anschlusse hieran noch eine Arbeit von Hurwitz (Math. Ann. Bd. 39 pg 279 u. f.) zur Sprache bringen, in welcher die Frage nach den Minimalwerten von $|\omega y - x|$ noch etwas weiter geführt wird. Das Résultat von Hurwitz lautet, in unsere Sprechweise übertragen: Man kann den Punkt x, y unter den Eckpunkten der Umrisspolygone immer so auswählen, daß

$$|\omega y - x| \leq \frac{1}{\sqrt{5}\, y}$$

wird. Construiren wir uns diejenigen Curven, welche dem Gleichheitszeichen entsprechen, d. h. die beiden Hyperbeln

$$\omega y^2 - xy = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{und} \quad \omega y^2 - xy = -\frac{1}{\sqrt{5}};$$

dieselben haben die x-Axe und ω-Linie zu Asymptoten und grenzen um diese einen schmalen Streifen ab. Der Hurwitz'sche Satz sagt dann einfach aus, dass jedenfalls einige Eckpunkte unserer Polygonzüge in bez. an diesen Streifen reichen. Jedenfalls wird sich auch der Beweis dieses Satzes bei Benutzung unseres Bildes besonders übersichtlich gestalten.

I. Hauptteil.

Wir kommen nun zu dem eigentlichen Thema dieser Vorlesung, zu der

Reductionstheorie der binären quadratischen Formen,

welche wir ein für allemal in die Gestalt setzen.

$$f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2.$$

1. Geometrische Vorbegriffe.

Der zahlentheoretischen Betrachtung schik= ken wir einige geometrische Überlegungen von allgemeinem Charakter voraus, wie sie in allerdings viel umfassender Form in der Erlanger Programmschrift: Ver= gleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen: (abgedruckt in Ann. Bd. 43) entwickelt worden sind. Es handelt sich darum, die Ge= samtwissenschaft der Geometrie nach allgemeinen mathematischen Gesichts= punkten einzuteilen, nicht darum, die= selbe vom philosophischen Standpunk= te grundsätzlich aufzubauen. In die= sem Sinne nehmen wir für das Folgen= de ein rechtwinkliges Coordinatensystem als gegeben an; übrigens genügt es für unsere Zwecke von der Geometrie der Ebene zu handeln.

Unsere Einteilung ist eine gruppentheo= retische. Wir unterscheiden soviele Arten von Geometrie, als es Gruppen von Ope= rationen giebt, denen wir die geome= trischen Gebilde unterwerfen mögen.

1.) "Wir beginnen mit der metrischen oder elementaren Geometrie. Hier betrachtet man diejenigen Figuren als gleichwertig, welche sich nur durch die Lage oder durch den Maasstab der Zeichnung unterscheiden. Man lässt also die Operationen der Bewegung und der Ähnlichkeitstransformation zu. Ihren analytischen Ausdruck finden sie in den Gleichungen:

$$x = aX + bY + c \qquad a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2$$
$$y = a'X + b'Y + c' \qquad ab + a'b' = 0.$$

Das x, y und das X, Y - System sind entweder congruent oder ähnlich, entweder gleichstimmig oder entgegenstimmig.

Die hierdurch umgrenzten Operationen bilden eine Gruppe, welche Hauptgruppe heisst. Die Hauptgruppe umfasst alle diejenigen Operationen, bei denen die inneren Eigenschaften der Figuren ungeändert bleiben. Umgekehrt gehören nur solche Eigenschaften in die Geometrie, welche ungeändert bleiben bei den Operationen

der Hauptgruppe. Durch diese Beziehung zur Hauptgruppe unterscheidet sich die Geometrie der Ebene von einer individuellen Betrachtung der Wertsysteme x, y. Elementargeometrie, so können wir auch sagen, ist Invariantentheorie der Hauptgruppe.

2.) Neben die Elementargeometrie stellt sich als zweite die affine Geometrie. Ihre Gruppe besteht aus sämtlichen affinen Transformationen, also aus den Umänderungen

$$x = aX + bY + c,$$
$$y = a'X + b'Y + c',$$

wo jetzt die Bedingungsgleichungen für die Coefficienten in Wegfall kommen. Sie entstehen aus den Transformationen der Hauptgruppe durch Hinzunahme beliebiger Parallelprojectionen. Die affine Geometrie interessirt sich nur für solche Eigenschaften der Figuren, welche durch affine Operationen nicht zerstört werden.

3.) Die nächst höhere Geometrie ist die projective. Ihre Gruppe besteht

aus den Umänderungen der folgenden Form

$$x = \frac{aX + bY + c}{a''X + b''Y + c''},$$

$$y = \frac{a'X + b'Y + c'}{a''X + b''Y + c''}$$

Zu den bisherigen Operationen sind hier die Centralprojectionen hinzugekommen. In der projectiven Geometrie sieht man als wesentlich nur solche Eigenschaften an, welche auch bei beliebiger Centralprojection, also bei beliebiger Veränderung des Augenpunktes im Raume und beliebiger Stellung der Projectionsebene erhalten bleiben. – So kann man successive fortgehen, indem man die Gruppe der Geometrie um neue Operationen erweitert und jedesmal die Invariantentheorie dieser erweiterten Gruppe studirt. –

In der metrischen Geometrie ist die wichtigste Invariante die Entfernung, in der projectiven ist sie das Doppelverhältniss. In der affinen Geometrie bleibt neben letzterem auch der Flä-

cheninhalt der Figuren invariant. Sehen wir nämlich von den constanten Gliedern in den Transformationsgleichungen ab, deren Hinzunahme nur eine Verschiebung, also eine Transformation der Hauptgruppe, bedeutet, so können wir sie schreiben:

$$x = aX + bY$$
$$y = cX + dY.$$

Sind $0\,0$, $x\,y$, $x'\,y'$ die Ecken eines Dreiecks in ursprünglicher, $0\,0$, $X\,Y$, $X'\,Y'$ in transformirter Lage, so wird sein Inhalt

$$\tfrac{1}{2}(xy' - x'y) = \tfrac{1}{2}(ad - bc)(XY' - X'Y).$$

Der Flächeninhalt eines Dreiecks und, da man jede Figur aus einer Anzahl von Dreiecken zusammensetzen kann, auch der Flächeninhalt jeder Figur ändert sich bei affiner Transformation also nur um die Determinante der Substitution. Liegt der für das Spätere wichtige Fall vor, dass die Determinante gleich Eins ist, so bleibt der Flächeninhalt schlechtweg invariant.

Im Vorhergehenden gingen wir genetisch vor, indem wir durch succes-

sive Abstraction von der metrischen Geometrie zur projectiven aufstiegen. Systematischer gestaltet sich noch das umgekehrte Verfahren. Wir suchen zunächst diejenigen Verhältnisse der geometrischen Figuren auf, welche bei allen Umformungen der projectiven Gruppe erhalten bleiben. Um zum Standpunkte der affinen Geometrie überzugehen, adjungiren wir die unendlich ferne Gerade und ziehen dementsprechend nunmehr denjenigen Teil der projectiven Umformungen in Betracht, welche die unendlich ferne Gerade in sich überführen. In entsprechender Weise kommen wir von der affinen zu der metrischen Geometrie, wenn wir die beiden Kreispunkte adjungiren (vergl. auch hierzu das Erlanger Programm).

Dies Verfahren trägt gleichzeitig die Möglichkeit einer Verallgemeinerung in sich. Wir könnten ja bei dem Übergang von der affinen zur metrischen Geometrie auch zwei andere Punkte

der unendlich fernen Geraden ebenso gut festhalten, als gerade die Kreispunkte. Wir gelangen dann nicht zur gewöhnlichen metrischen Geometrie, sondern zu einer allgemeinen, <u>pseudometrischen</u> (oder besser gesagt, wie Salmon ursprünglich wollte, zu einer quasimetrischen) <u>Geometrie.</u> Die gewöhnliche metrische Geometrie erweist sich dann als ein specieller Fall der letzteren.

Sind $x : y : t$ gewöhnliche homogen gemachte rechtwinklige Coordinaten, so werden die Kreispunkte bekanntlich durch die folgenden Gleichungen bestimmt: $x^2 + y^2 = 0$, $t = 0$. Entsprechend lautet der Ausdruck für die Entfernung in der gewöhnlichen Geometrie $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

Statt der Kreispunkte wählen wir in der Pseudogeometrie die auf der unendlich fernen Geraden gelegenen Nullpunkte einer beliebigen quadratischen Form, d. h. die Punkte:

$$f = ax^2 + bxy + cy^2 = 0, \quad t = 0,$$

als Grundpunkte der Maassbestimmung und definiren als <u>Pseudoentfernung</u>

(indem wir wieder $t = 1$ setzen) den folgenden Ausdruck

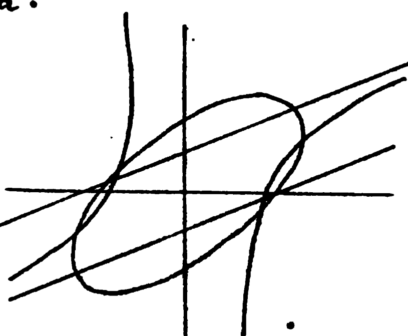
$$r = \sqrt{ax^2 + bxy + cy^2}.$$

Drei Fälle sind dabei zu unterscheiden. Die Grundpunkte können zwei conjugirt imaginäre, zwei getrennte reelle oder zusammenfallende Punkte sein, jenachdem $b^2 - 4ac < 0, > 0$ oder $= 0$ ist. Im ersten Fall ist die Form $f(x, y)$ eine definite, positive oder negative. Die Curve $r^2 = 1$, welche dem Einheitskreise der gewöhnlichen Geometrie entspricht, wird, in der gewöhnlichen Maassbestimmung betrachtet, eine Ellipse oder ein imaginärer Kegelschnitt, je nachdem f eine positive oder negative Form ist. Wir werden unsere Betrachtung auf den Fall der positiven Formen beschränken, weil die negativen leicht auf diese zurückgeführt werden können. Wir wollen daher sagen: im ersten Falle wird der Pseudokreis $r^2 = 1$ eine Ellipse; dementsprechend nennen wir diesen den <u>elliptischen Fall der Maassbestimmung.</u>

Im zweiten Falle wird die Curve $r^2 = 1$ eine Hyperbel; dies nennen wir den <u>hyperboli=</u>

schen Fall. Den dritten Fall werden wir als parabolischen bezeichnen. Die Curve $r^2 = 1$ besteht hier aus den beiden geraden Linien

$$ax + \frac{by}{2} = \pm\sqrt{a}.$$



Damit haben wir den allgemeinen, man möchte sagen, souveränen Standpunkt der Cayley'schen Maassbestimmung bezeichnet. Das Wesentliche ist, daß wir die Maassbestimmung nicht als etwas durch die Natur der Ebene von vorneherein gegebenes ansehen, vielmehr durch freiwillige Festsetzung der Ebene auferlegen. Es wird unsere nächste Aufgabe sein, uns mit dem verschiedenen Charakter der dreierlei Fälle im Einzelnen vertraut zu machen.

1. Elliptischer Fall.

Die Entfernung eines Punktes x, y von dem Nullpunkte wurde bereits definirt durch die Gl. $r^2 = f(x, y)$. In entsprechender Weise werden wir für die Entfernung

irgend zweier Punkte $x\,y$ und $x'\,y'$ den Ausdruck festsetzen: $r^2 = f(x-x', y-y')$. Das System der Curven $r = \text{const.}$, welches den concentrischen Kreisen in der gewöhnlichen Geometrie entspricht, besteht aus einem Systeme ähnlicher und ähnlich gelegener Ellipsen.

Weiter haben wir den Begriff des Winkels in die Pseudogeometrie zu übertragen. In der gewöhnlichen Geometrie berechnet sich der Winkel zweier Strecken $O(x, y)$ und $O(x', y')$ folgendermassen:

$$\varphi = \arccos \frac{x x' + y y'}{\sqrt{x^2 + y^2}\,\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \arcsin \frac{x y' - x' y}{\sqrt{x^2 + y^2}\,\sqrt{x'^2 + y'^2}}.$$

In unserer allgemeinen Maassbestimmung müssen wir natürlich den Winkel so definiren, daß er in die vorstehende Grösse übergeht, falls wir die Grundpunkte der Maassbestimmung durch affine Transformation, also homogene lineare Transformation der x und y, in die Kreispunkte rücken lassen. Dementsprechend setzen wir $a x^2 + b x y + c y^2$ an die Stelle von $x^2 + y^2$ und bilden statt $x x' + y y'$,

welcher Ausdruck die Polare des Punktes $x'y'$ in Bezug auf das Geradenpaar $x^2+y^2=0$ darstellt, die Polare $axx'+b(xy'+x'y)+cyy'$ in Bezug auf unser neues Geradenpaar $ax^2+bxy+cy^2=0$.
Somit definiren wir den Winkel der Strecken $O(x,y)$ und $O(x',y')$ in der Pseudogeometrie folgendermaassen:

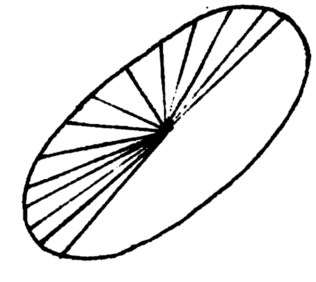
$$\varphi = \arccos \frac{axx' + b/2\,(xy'+x'y) + cyy'}{\sqrt{ax^2+bxy+cy^2}\,\sqrt{ax'^2+bx'y'+cy'^2}},$$

woraus sich noch als zweiter Ausdruck ergiebt:

$$\varphi = \arcsin \frac{(xy'-x'y)\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{ax^2+bxy+cy^2}\,\sqrt{ax'^2+bx'y'+cy'^2}}.$$

Zur Veranschaulichung wollen wir zusehen, was die Gleichheit zweier Winkel bedeutet. Wir wollen uns vom Mittelpunkte der Einheitsellipse eine Anzahl von Geraden zeichnen, welche im Sinne der Pseudogeometrie je gleiche Winkel mit einander bilden, also geradezu eine Winkelscala construiren. Die entstehenden Ellipsenvectoren sind dann im Sinne der Pseudogeometrie congruent, d. h. sie können

durch Pseudobewegung, hier durch blosse Drehung, zur Deckung gebracht werden. Im Sinne der gewöhnlichen Maassbestimmung sind sie immer noch <u>inhaltsgleich</u>. Denn die Pseudodrehungen machen einen gewissen Teil der



affinen Transformationen aus; sie haben ausserdem die Determinante <u>1</u>, weil sie einen bestimmten Flächeninhalt, nämlich die Fläche der Einheitsellipse, in sich überführen. In Folge dessen bleibt bei unseren Drehungen nach Obigem auch im Sinne der gewöhnlichen Maassbestimmung der Flächeninhalt der Figuren invariant. Diese Bemerkung dient dem Auge als Anhalt, wenn wir, wie in der Figur, um O eine Winkelscala entwerfen wollen.

Hieran könnten wir noch weitere Bemerkungen über die anderen Operationen in der Gruppe unserer Pseudoge-

metrie, Ähnlichkeitstransformation und Spiegelung, anschliessen.

Diejenigen unter Ihnen, denen diese im Grunde sehr einfachen Begriffe ungewohnt sind, können sich dieselben vielleicht durch einen Vergleich mit der allgemeinen Flächentheorie näher bringen. Dort führt man bekanntlich als krummlinige Coordinaten eines Flächenpunktes irgend zwei Curvensysteme x und y ein und stellt das Linienelement, d. h. die Entfernung zweier benachbarter Punkte durch sie folgendermaassen dar:

$$ds = \sqrt{\mathcal{E}\,dx^2 + 2\mathcal{F}\,dx\,dy + \mathcal{G}\,dy^2},$$

wo die $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ im Allgemeinen Functionen von x und y sein werden. Unsere Maassbestimmung in der Ebene nun, in welcher

$$ds = \sqrt{a\,dx^2 + b\,dx\,dy + c\,dy^2}$$

wird, erweist sich als ein spezieller Fall jener, indem nämlich bei uns $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ constante Grössen sind. In analytischer Hinsicht ordnet sich

unsere Maassbestimmung durchaus in die allgemeine Flächentheorie ein, nur die Auffassung ist in beiden Fällen eine verschiedene. In der Flächentheorie denken wir uns die Maassbestimmung der geometrischen Gestalt der Fläche entnommen, in unserem Falle dagegen tragen wir sie unsererseits durch einen Akt der Willkür in die Fläche herein. Das ist derselbe Gedanke, den wir, soweit die Ebene in Betracht kommt, schon oben berührten.

Eine bedeutende Vereinfachung erzielen wir dadurch, dass wir unsere quadratische Form f in zwei complexe Factoren spalten:

$$f(x,y) = \left(\sqrt{a}\,x + \frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2\sqrt{a}}\,y\right)\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2\sqrt{a}}\,y\right)$$

und diesen Factoren einen geometrischen Sinn beilegen. Jeder dieser Factoren, gleich Null gesetzt, stellt eine gerade Linie dar, welche durch den einen oder anderen Grundpunkt auf der unendlich fernen Geraden hindurchgeht. Wir bezeichnen sie nach dem Vorgange von Lie als Minimallinien. Den Minimallinien kommen

im Sinne unserer Maassbestimmung die paradoxesten Eigenschaften zu: sie haben beispielsweise die Länge Null und stehen auf sich selbst rechtwinklig, wie aus unseren obigen Définitionen von Entfernung und Winkel hervorgeht.

Dass diese Linien imaginär sind, soll uns nicht davon abhalten, mit ihnen geometrisch zu operiren. Wir werden dieselben sogar zu Axen eines Coordinaten-Systems, des „Minimalcoordinaten-Systems" machen. Die Minimalcoordinaten ξ und η definiren wir als Parameter in den beiden Geradensystemen, welche der einen oder anderen Minimallinie parallel laufen, wir setzen einfach

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \sqrt{a}\,x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\sqrt{a}}\,y \\ \eta &= \sqrt{a}\,x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\sqrt{a}}\,y \end{aligned}\right\} \text{ so dass } r = \sqrt{\xi\eta} \text{ wird}$$

Die Minimalcoordinaten sind gewöhnliche (nur imaginäre) Parallelcoordinaten. Einem reellen Punkte der Ebene x und y entsprechen 2 conjugirt

imaginäre Werte von ξ und η.

Die Minimallinien der gewöhnlichen Maassbestimmung sind die beiden Strahlen nach den Kreispunkten $x + iy = 0$ und $x - iy = 0$. Die Minimalcoordinaten sind hier einfach so zu definiren

$$\left.\begin{array}{l} \xi = x - iy \\ \eta = x + iy \end{array}\right\}.$$

Überall da, wo man in der gewöhnlichen Geometrie der Ebene mit den complexen Aggregaten $x + iy$ und $x - iy$ rechnet, können wir demnach von Minimalcoordinaten reden. Der Nutzen der Minimalcoordinaten ist hiernach aus der Functionentheorie, aus der Mechanik etc. hinlänglich bekannt. Für unsere Zwecke liefern sie wesentliche Vereinfachungen. Wir stellen zunächst den Ausdruck für eine Drehung in Minimalcoordinaten her. Eine Drehung um O ist eine lineare Substitution in den x, y, also auch in den ξ, η. Nun bleiben bei der Drehung die Grundpunkte, also auch die Strahlen von O nach diesen, d. h. die Mi-

nimallinien ungeändert. Eine Drehung führt also $\xi = 0$ in $\xi' = 0$ über und $\eta = 0$ in $\eta' = 0$. Daher nimmt der Ausdruck für eine Drehung folgende Gestalt an:

$$\left.\begin{array}{l} \xi' = m\,\xi \\ \eta' = m'\eta \end{array}\right\}.$$

Berücksichtigen wir noch, dass die Determinante der Substitution gleich 1 und die Coefficienten conjugirt imaginär sein müssen, wenn anders die Drehung reelle Punkte in reelle überführen soll, so können wir die vorstehenden Gleichungen folgendermaassen schreiben:

$$\left.\begin{array}{l} \xi' = e^{i\varphi}.\,\xi \\ \eta' = e^{-i\varphi}.\,\eta \end{array}\right\}.$$

Die reelle Grösse φ bedeutet den Drehungswinkel im Sinne unserer Maassbestimmung. Aus den vorstehenden Gl. folgt nämlich durch Addition

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}\,\frac{(\xi'\eta + \xi\,\eta')}{\xi\,\eta}$$

oder auch, da $\xi\eta = \xi'\eta' = r^2$:

$$\cos \tau = \frac{\frac{1}{2}(\xi'\eta + \xi\eta')}{\sqrt{\xi\eta}\,\sqrt{\xi'\eta'}}$$

was mit der Winkeldefinition von pag 61 übereinstimmt, weil $\frac{\xi'\eta + \xi\eta'}{2}$ die Polare von $\xi\eta$ ist.

Viel eleganter aber können wir jetzt den Pseudowinkel im Anschluss an unsere Drehungssubstitution folgendermassen definiren:

Der Winkel der beiden Strahlen von 0 nach (ξ, η) und (ξ', η') ist gleich $\frac{1}{2}$ multiplicirt mit dem Logarithmus des Doppelverhältnisses, welches die genannten Strahlen mit den Minimallinien bilden. Aus unseren Substitutionsformeln folgt nämlich durch Division die Gleichung:

$$\tau = \frac{1}{2} \lg \left(\frac{\xi'}{\eta'} : \frac{\xi}{\eta}\right),$$

welche die neue Winkeldefinition ergiebt. Dieselbe ist natürlich nur in der Form von der früheren verschieden, analytisch ist sie jener ganz gleichwertig.

Do. 21. Nov. 95. Zum Schlusse unserer Aus-

führungen über die elliptische Maassbestimmung müssen wir bemerken, dass wir uns alle diese Einzelheiten hätten ersparen können. Wir hätten nämlich mit Zuhilfenahme projectiver Begriffe einfach folgendermassen sagen können. Wir erhalten die elliptische Maassbestimmung in einer Ebene, wenn wir eine mit gewöhnlicher Maassbestimmung ausgestattete Ebene durch Parallelprojection auf jene beziehen und die Maassverhältnisse aus der Originalebene auf die entsprechenden Stücke der Bildebene übertragen. Wir haben nur dafür zu sorgen, dass die Kreispunkte bei der Projection übergehen in die Grundpunkte der elliptischen Maassbestimmung. Dabei wird beispielsweise aus dem System concentrischer Kreise um O in der Originalebene das System ähnlicher und ähnlich gelegener Ellipsen in der Bildebene werden; eine gewöhnliche Winkelskala congruenter Teile verwandelt sich in die elliptische

°Winkelskala von pg. 62.

Die Sache liegt, kurz gesagt, so: <u>Indem wir von einer elliptischen Maassbestimmung in der Bildebene sprechen, denken wir an die gewöhnliche Maassbestimmung in der Originalebene.</u>

Zum Beweise dessen greifen wir auf unsere Formeln für Minimalcoordinaten zurück. Seien ξ, η die oben definirten Minimalcoordinaten der elliptischen Maassbestimmung, Ξ, H gewöhnliche Minimalcoordinaten in einer X, Y-Ebene, so dass

$$\Xi = X + iY, \quad H = X - iY$$

wird; dann führt die Substitution $\Xi = \xi$, $H = \eta$ die Grundpunkte der x, y-Ebene in die Kreispunkte der X, Y Ebene über und die elliptische Maassbestimmung verwandelt sich in die gewöhnliche. Ausführlicher schreibt sich jene Substitution folgendermassen:

$$X \pm iY = \sqrt{a}\, x + \frac{b \pm i\sqrt{4ac - b^2}\, y}{2\sqrt{a}}$$

oder

$$X = \sqrt{a}\, x + \frac{b y}{2\sqrt{a}}$$

$$Y = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2\sqrt{a}}\, y.$$

Es ist aber aus der projectiven Geometrie bekannt, daß dieses die Gleichungen einer Parallelprojection der $x' y'$ – auf die xy Ebene sind. <u>Eine mit elliptischer Maassbestimmung ausgestattete x', y' – Ebene kann also durch Parallelprojection stets in eine x, y – Ebene mit gewöhnlicher Maassbestimmung übergeführt werden.</u>

<u>2. Hyperbolischer Fall, $b^2 - 4ac > 0$.</u>

Dieselbe Betrachtungsweise liesse sich auch auf den Fall der hyperbolischen Maassbestimmung anwenden. Wir können die hyperbolische Ebene gleichfalls durch Parallelprojection in eine Ebene mit gewöhnlicher Maassbestimmung verwandeln, wobei der Übergang durch dieselben Transformationsgleichungen wie vorhin vermittelt wird. Diese Gleichungen enthalten jetzt aber in ihren Coefficienten die Quadratwurzel aus einer negativen Grösse. Die Projection wird daher jetzt eine imaginäre. Da aber die Verhältnisse bei einer imaginären Projection nicht ohne Weiteres anschaulich sind,

müssen wir die geometrische Bedeutung der hyperbolischen Maassbestimmung im Einzelnen durchgehen, und eben deshalb hatten wir als eine Vorübung das Gleiche vorhin bei der elliptischen Maassbestimmung gethan.

Den Abstand eines Punktes x, y von O definiren wir nach wie vor durch den Ausdruck

$$r = \sqrt{ax^2 + bxy + cy^2} = \sqrt{\xi \cdot \eta}$$

Für die Punkte gleichen Abstandes besteht die Gleichung $ax^2 + bxy + cy^2 = C$. In dem besonderen Falle $C = 0$ zerfällt die Curve gleichen Abstandes in 2 reelle gerade Linien $\xi = 0, \eta = 0$; es sind dieses die „<u>Minimallinien der hyperbolischen Maassbestimmung</u>", deren sämmtliche Punkte von O den Abstand Null besitzen. Die Minimallinien

zerlegen die Ebene in zwei Doppel-vectoren. In dem einen Doppelvector haben ξ und η gleiches, in dem anderen entgegengesetzten Vorzeichen.

Ist C von Null verschieden, so besteht die Curve gleichen Abstandes aus einer Hyperbel, welche die Minimallinien zu Asymptoten hat. Dieselbe liegt in dem ersten oder zweiten Doppelvector, je nachdem $C > 0$ oder $C < 0$ ist. Die Punkte des ersten Sectors haben daher von O einen reellen, die des zweiten einen imaginären Abstand.

Unter dem Winkel (φ) zweier von O auslaufender Strahlen verstehen wir hier wie im vorigen Falle den mit $\frac{i}{2}$ multiplicirten Logarithmus desjenigen Doppelverhältnisses, welches jene Strahlen mit den Minimallinien bilden. Hinsichtlich der Realität des Winkels müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

a. Beide Geraden liegen in demselben Doppelsector. Dann besitzt das

genannte Doppelverhältnis einen positiven Wert; wir haben daher, unter ϱ eine reelle Grösse verstanden:

$$\lg DV = \varrho \pm 2k\pi i$$

und

$$\varphi = \frac{i\varrho}{2} \mp k\pi.$$

Zwei Strahlen, welche demselben Sector angehören, bilden also mit einander, von Multiplis der Zahl π abgesehen, einen rein imaginären Winkel.

b. Beide Geraden liegen in verschiedenen Sectoren. Dann ist das Doppelverhältnis negativ; also

$$\lg DV = \varrho \pm (2k+1)\pi i$$

und

$$\varphi = \frac{i\varrho}{2} \mp (k+\tfrac{1}{2})\pi.$$

Zwei Strahlen, welche durch die Minimalgeraden getrennt werden, liefern also einen Winkel, dessen reeller Bestandteil ein ungerades Vielfaches von $\pi/2$ ist. Die Minimallinien selbst bilden mit jeder Geraden einen unendlich grossen Winkel. Lassen wir nämlich einen der vorher betrachteten Strahlen in eine

der Minimallinien rücken, so wird das Doppelverhältnis 0 oder ∞. Der zugehörige Winkel ist also allemal unendlich gross.

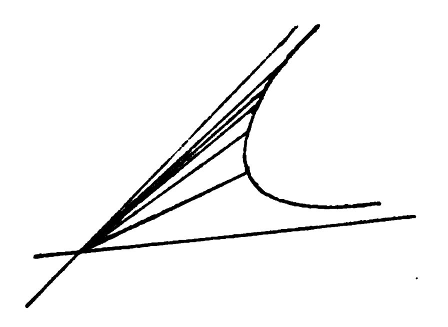
Wollen wir, was später bequem sein wird, den imaginären Winkel φ durch eine reelle Grösse ψ ausdrücken: $\varphi = i\psi$, so müssen wir natürlich auch den sin φ durch $\sin i\psi = sh(\psi)$ ersetzen. In den trigonometrischen Formeln der hyperbolischen Geometrie sind also dann die trigonometrischen Functionen durch die sog. hyperbolischen zu ersetzen.

Durch die Minimalcoordinaten ξ und η drückt sich der Winkel wieder besonders einfach aus. Es wird nämlich

$$\varphi = 1/2 \lg \left(\frac{\xi}{\eta} : \frac{\eta'}{\xi'}\right)$$

Wollen wir nun auch eine <u>hyperbolische Winkelskala</u> construiren, so zeichnen wir uns zunächst die Einheitshyperbel $r^2 = 1$. Einen von 0 aus nach dieser verlaufenden

Radiusvector drehen wir nun fortgesetzt um den gleichen hyperbolisch gemessenen Winkel vorwärts, wobei der Endpunkt des Vectors auf der Hyperbel



fortgleitet. Die von dem Vector beschriebenen Flächen, welche im Sinne der hyperbolischen Maassbestimmung congruent sind, bleiben im Sinne der gewöhnlichen Maassbestimmung inhaltgleich. Danach ist die Figur der Winkelskala zu entwerfen.

Wenn wir solcher Weise den Radius Vector fortgesetzt um den gleichen Betrag weiter drehen, bringen wir ihn einer der Minimallinien immer näher, ohne sie jedoch jemals zu erreichen. Denn der Flächeninhalt, welcher von unserm Radius-Vector, der Einheitshyperbel und der Minimallinie eingeschlossen wird, ist unendlich gross.

Bei einer endlichen Anzahl endlicher Drehungen überstreichen wir aber mit unserem Radius-Vector nur eine endliche Fläche. Wir gelangen also, so oft wir auch drehen mögen, niemals bis in die Minimallinie hinein. Daraufhin verstehen wir auch, warum die Minimallinie mit jeder Geraden einen unendlich grossen Winkel bilden muss.

Der analytische Ausdruck für eine Drehung um O ergiebt sich aus der vorstehenden Gleichung für den Winkel zweier von O auslaufenden Geraden. Danach besteht zwischen einem Punkte $\xi' \eta'$ der um φ gedrehten Geraden und einem Punkte $\xi \eta$ der Geraden vor der Drehung die Relation:

$$\frac{\xi'}{\eta'} = e^{2i\varphi} \cdot \frac{\xi}{\eta} .$$

Spalten wir diese Gleichung so, dass $\xi\eta = \xi'\eta'$ wird, so erhalten wir die Coordinaten ξ', η' desjenigen Punktes, in den der Punkt ξ, η durch die Drehung übergeführt wird, nämlich

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= e^{i\tau}\cdot\xi \\ \eta' &= e^{-i\tau}\cdot\eta \end{aligned}\right\}.$$

Hier ist $e^{i\tau}$ eine reelle Grösse. Wir schreiben daher lieber folgendermassen:

$$\xi'' = e^{-\psi}\cdot\xi = \varrho\,\eta$$
$$\eta' = e^{+\psi}\cdot\xi = 1/\varrho\,\eta\,.$$

Dieses sind die Gleichungen der Drehungssubstitution. *Sie zeigen, dass die Drehung in der hyperbolischen Geometrie eine aperiodische, nicht wie in der gewöhnlichen oder elliptischen Geometrie eine periodische Operation ist.*

Neben der Drehung betrachten wir die Operation der *Spiegelung*. Eine Spiegelung definiren wir als eine Drehung, verbunden mit einer Vertauschung von ξ und η. Die Transformationsgleichungen der Spiegelung werden also

$$\xi' = \varrho\,\eta$$
$$\eta' = 1/\varrho\,\xi\,.$$

Bei dieser Operation gibt es zwei gerade

Linien, welche ungeändert bleiben, nämlich die Linien

$$\frac{\xi}{\eta} = +\varrho \quad \text{und} \quad \frac{\xi}{\eta} = -\varrho.$$

Die erste dieser Linien geht bei der Spiegelung Punkt für Punkt in sich über. Wir haben nämlich unter m einen Proportionalitätsfactor verstanden:

$$\begin{matrix} \xi = m\varrho \\ \eta = m \end{matrix} \quad \text{und daher} \quad \begin{matrix} \xi' = m\varrho = \xi \\ \eta' = \varrho = \eta \end{matrix}.$$

Die zweite Linie geht in der Weise in sich über, daß der Punkt ξ, η mit dem Punkte $-\xi, -\eta$ vertauscht wird. Zu den Minimalgeraden liegen diese beiden Linien <u>harmonisch</u>. Man überzeugt sich leicht, daß der so definirten Operation in der gewöhnlichen Geometrie die gewöhnliche Spiegelung, daß der ersten Linie die Spiegelungsaxe, der zweiten die dazu Senkrechte entspricht.

3. Parabolischer Fall. $b^2 - 4ac = 0$.

Im parabolischen Falle wird die Form $ax^2 + bxy + cy^2$ ein vollständiges Quadrat. Der Ausdruck für die Entfer-

nung wird daher hier linear in x und y

$$r = \pm (Ax + By) = \xi .$$

Die Minimallinien bestehen aus der doppelt zu zählenden Geraden $Ax + By = 0$. Die Entfernung eines Punktes p von o wird gleich seiner Entfernung ξ von der Minimallinie. Die Entfernung zweier Punkte p und p' von einander ist gleich $\xi - \xi'$. Schalten wir noch beliebige andere Punkte $p_1, \ldots, p_2$ ein, so wird jetzt die Entfernung p von p' gleich der Entfernung p von $p_1 + \ldots +$ der Entfernung p_2 von p', da

$$\xi - \xi' = \xi - \xi_1 + \xi_1 - \cdots + \xi_2 + \xi_2 - \xi' .$$

Wir kommen also zu dem paradoxen Resultat, dass die Weglänge zwischen 2 Punkten in der parabolischen Massbestimmung unabhängig wird von dem zurückgelegten Wege und nur von der Lage des Anfangs- und Endpunktes abhängt. (Das Bogenelement ds erscheint als ein vollständiges Differential).

Wollen wir den Winkel zweier in O zusammenlaufenden Geraden berechnen, so müssen wir die zusammenfallenden Minimallinien des parabolischen Falles als Grenzfall zweier nicht zusammenfallender Linien auffassen. Seien daher die Minimallinien zunächst

$$\xi = 0 \text{ und } \eta = \xi + \varepsilon\zeta = 0.$$

Den Winkel definiren wir dann wie früher durch:

$$\tfrac{1}{2} \lg\left(\frac{\xi}{\xi+\varepsilon\zeta} \cdot \frac{\xi'+\varepsilon\zeta'}{\xi'}\right),$$

wo nun ε eine zu Null abnehmende Grösse bedeutet. Wollen wir zu einer vernünftigen Winkeldefinition kommen, so müssen wir eine mit ε variable Maasseinheit einführen. Wir schreiben daher:

$$C\left\{\lg\left(1+\varepsilon\frac{\zeta'}{\xi'}\right) - \lg\left(1+\varepsilon\frac{\zeta}{\xi}\right)\right\} = C\varepsilon\left(\frac{\zeta'}{\xi'} - \frac{\zeta}{\xi}\right) + \cdots$$

und setzen fest, dass $C\varepsilon$ gleich einer festen Grösse k sei. Unter dem Winkel verstehen wir daher hier die Grösse

$$k\left(\frac{\zeta'}{\xi'} - \frac{\zeta}{\xi}\right),$$

in welcher ξ und ζ den Abstand von der Minimallinie $\xi = 0$ und von einer Hülfsgeraden $\zeta = 0$ bedeutet. Der Winkel wird jetzt eine algebraische Function der Coordinaten, während er früher eine transcendente war. –

Freit. d. 22. XI. Wir kehren nunmehr zur Zahlentheorie zurück und machen uns zunächst in arithmetischer Formulirung mit dem fundamentalen Problem aus der Theorie der binären quadratischen Formen, mit dem wir uns hier in erster Linie ausführlich beschäftigen müssen, dem „Äquivalenzproblem" bekannt. Es handelt sich um Folgendes: Gegeben seien zwei Formen

$$f = ax^2 + bxy + cy^2$$
$$f' = a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2,$$

in welchen wir unter $x, y, \dots$, ganze Zahlen verstehen wollen, während wir die Coefficienten $a, b, c \dots$ nicht ausschliesslich als ganzzahlig voraussetzen werden. Können diese Formen durch eine Substitution:

$$x = \alpha x' + \beta y'$$
$$y = \gamma x' + \delta y'$$

mit reellen ganzzahligen Coefficienten von der Determinante

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$$

in einander übergeführt werden? Wenn dieses der Fall ist, nennen wir die Formen f und f' aequivalent u. zw. eigentlich oder uneigentlich aequivalent, je nachdem die Determinante der Substitution $+1$ oder -1 ist.

Eine Vorbedingung für die Aequivalenz beider Formen leiten wir aus der Betrachtung der Ausdrücke $b^2 - 4ac$ bez. $b'^2 - 4a'c'$ her. Ihr Vorzeichen entscheidet bekanntlich über die Realität der Wurzeln von $f = 0$ bez. $f' = 0$; sie werden daher als Discriminanten bezeichnet. Nun ändert aber unsere reelle Substitution $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ an der Realität der Wurzeln nichts. Sollen daher die Formen f und f' bei der Substitution identisch werden, so müssen sie von vornherein in dem Vorzeichen ihrer

Discriminanten übereinstimmen. Beide Formen gehören daher, falls sie aequivalent sind, gleichzeitig zu dem elliptischen parabolischen oder hyperbolischen Falle.

Die Invariantentheorie belehrt uns darüber hinaus, dass die Discriminante einer Form eine invariante Bildung ist, dass sie sich also bei einer linearen Substitution nur um eine Potenz der Substitutionsdeterminante ändert. Verstehen wir unter A, B, C die Coefficienten der transformirten Form, so wird nämlich

$$B^2 - 4AC = (b^2 - 4ac)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2.$$

In unserem Falle ($\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$) bleibt also die Discriminante völlig ungeändert.

Die Gleichheit der Discriminanten von f und f': $b^2 - 4ac = b'^2 - 4a'c' = D$ ist daher jedenfalls eine nothwendige Bedingung für ihre Aequivalenz. Damit ist aber die Frage noch lange nicht entschieden. Der Inhalt der fol-

genden Theorie ist es gerade, die feineren Kriterien anzugeben, welche ausserdem für die Aequivalenz erforderlich sind. Wir übertragen die Frage sogleich in's Geometrische. Wir ziehen uns zur Versinnlichung der Form f ein Gitter und betrachten dieses im Sinne der durch $f(x, y)$ indicirten Maassbestimmung. Um letzteres anzudeuten, zeichnen wir in das Gitter unsern Einheitskegelschnitt hinein, welcher nach Umständen eine Ellipse, Hyperbel oder ein Linienpaar sein kann. Das Gitter repräsentirt uns gewissermassen den variablen Bestandtheil unserer Form f, nämlich die Paare ganzer Zahlen x und y, der Kegelschnitt den festen Bestandtheil, nämlich die Coefficienten a, b, c. Von dem Gitter kommen bei der sogleich zu nennenden offinen

Transformation nur die Gitterpunkte, nicht die Gitterstäbe in Betracht. Wir meinen im Folgenden daher nicht ein Parallel - sondern nur, ein Punktgitter.

Ein zweites gleichfalls mit einem Kegelschnitt versehenes Gitter stellt unsere zweite Form f' dar. Die Frage ist nun einfach: Sind die beiden so entstehenden Figuren affin verwandt, d. h. kann durch dieselbe affine Transformation erreicht werden, dass die Gitter und gleichzeitig die Kegelschnitte beider Figuren zur Deckung kommen.

Von vornherein ist klar, dass jedes Gitter in jedes andere und ebenso, dass jeder Kegelschnitt in jeden anderen durch affine Transformation verwandelt werden kann. Indem wir das eine oder andere an unseren Figuren vorweg thun oder nicht thuen, können wir unsere Frage geometrisch in 3 verschiedene Formulirungen bringen.

I. Gegeben 2 Gitter und 2 Kegelschnit-

te. Giebt es eine affine Transformation, welche Gitter in Gitter und gleichzeitig Kegelschnitt in Kegelschnitt überführt?

<u>II. Gegeben ein Gitter und 2 Kegelschnitte</u>. Gesucht eine affine Transformation, welche das Gitter ungeändert lässt und den einen Kegelschnitt in den anderen überführt.

<u>III. Gegeben 2 Gitter und ein Kegelschnitt</u>. Es handelt sich darum durch eine affine Transformation, welche den Kegelschnitt (und natürlich seinen Mittelpunkt O) ungeändert lässt, das eine Gitter in das andere zu verwandeln. Eine solche Transformation ist aber im Sinne der durch den Kegelschnitt repräsentirten Maassbestimmung eine Bewegung; sie ist genauer gesagt, eine Drehung, wenn sie die Determinante +1, eine Spiegelung, wenn sie die Determinante −1 hat. Im Falle der „Aequivalenz" müssen also unsere 2 Gitter bei dieser Art

der Fragestellung im Sinne der betr. Maassbestimmung <u>congruent</u> sein, u. zw. entweder direct oder spiegelbildlich congruent. Wir sehen uns also eigenthümlicher Weise hier in der Zahlentheorie vor dieselbe Frage geführt, mit welcher die elementare Geometrie anhebt, nämlich vor diese: <u>wann sind zwei Figuren congruent</u>?

Die verschiedenen Richtungen, in denen wir das vorliegende Problem unter I, II und III in Ansatz bringen, entsprechen genau den allgemeinen Formulirungen in S. 1, 2 meines Erlanger Programms. Es war mir damals nur nicht bekannt, daß eben jene Ideen auch in der Zahlentheorie fruchtbar sein könnten. Wenn man von der üblichen, algebraischen Geometrie ausgeht, so kommt man leicht dazu, als einziges Object der geometrischen Untersuchung die continuirlichen Curven anzusehen oder doch nur solche Gebilde, welche aus einer <u>endlichen</u> Zahl discreter Bestandtheile

bestehen. Ein ebenso interessantes Forschungsgebiet für den Geometer bilden aber ersichtlich auch Gebilde aus unendlich vielen discreten Bestandteilen wie unser Punktgitter. Sobald man nur diese mit berücksichtigt, erlangen die Begriffsbildungen der Geometrie sofort auch in der Arithmetik ihre Bedeutung, es verschwindet überhaupt der specifische Gegensatz zwischen beiden Gebieten.

Da die III. Formulirung des Aequivalenzproblemes eine besonders anschauliche war, werden wir im Folgenden diese vor dem anderen bevorzugen. Wir wollen zusehen, wie in diesem Falle die Elementarfigur des Coordinatensystems gestaltet ist, wie wir also den Einheitsvector der x und y-Axe zu wählen haben, damit der gerade hingezeichnete Kegelschnitt die Gleichung

$$f = ax^2 + bxy + cy^2 = 1.$$

bekommt. Dem Punkte $x=1, y=0$ entspricht als Entfernung von 0.

$$r = \sqrt{a},$$

dem Punkte $x=0, y=1$ ebenso:

$$r = \sqrt{c},$$

der Winkel der beiden Einheitsvectoren ferner wird nach pg. 61. gegeben durch

$$\cos \varphi = \frac{b}{2\sqrt{ac}} .$$

Alle 3 Grössen sind natürlich im Sinne der durch den hingezeichneten Kegelschnitt gegebenen Maassbestimmung zu verstehen; durch Angabe dieser 3 Grössen ist das Gitter bis auf das willkürlich zu wählende Azimuth des x-Vectors festgelegt.

Der Inhalt des Elementarparallelogramms berechnet sich in unserer Maassbestimmung ebenso wie in der gewöhnlichen durch die Formel:

$$\sqrt{ac}\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2} = \frac{\sqrt{-D}}{2}$$

Sollen unsere beiden zu f und f' gehörigen Gitter im Sinne des Ansatzes

III durch Bewegung zur Deckung gebracht werden können, so müssen sie von vornherein jedenfalls flächengleiche Elementarparallelogramme haben; denn ihr Inhalt bleibt bei der Bewegung und andererseits bei beliebig geänderter Auswahl des Elementarparallelogramms ungeändert. Die Gleichheit von D, welche wir bereits oben auf Grund der Invariantennatur der Discriminante constatirten, erweist sich hiernach auch geometrisch als eine notwendige Vorbedingung für die Möglichkeit der „Äquivalenz".

Specielle und in der Litteratur vorkommende Fälle unserer Kegelschnitt-Gitter-Figur sind diese:

Im elliptischen Falle, wir legen statt der Ellipse einen Kreis zu Grunde; dann bedeuten $\sqrt{a}$, $\sqrt{c}$ und $\frac{b}{2\sqrt{ac}}$ Seitenlängen und Winkelgrössen der Elementarfigur in gewöhnlicher Maassbestimmung. Lassen wir dann noch den Kreis als etwas Selbstverständliches weg, indem wir momentan von

der Möglichkeit einer Pseudomaassbestimmung absehen, so erhalten wir diejenige Gitterfigur, welche bereits bei Gauss 1831 in seiner Besprechung eines Buches von Sieber (Vergl. Werke Bd. II) vorkommt und welche den Ausgangspunkt für alle späteren arithmetisch-geometrischen Untersuchungen bildet.

Im hyperbolischen Falle; wir mögen hier etwa die Einheits-Hyperbel als gleichseitig annehmen. Die so entstehende Figur: gleichseitige Hyperbel mit eingezeichnetem Gitter: findet sich bei Selling (Vergl. Crelle Bd. 77, 1874), allerdings in wesentlich anderer Gedankenverbindung.

Freit. d. 29. XI. Wir haben nun das Äquivalenzproblem im elliptischen, hyperbolischen und parabolischen Falle zu studiren, wo die Verhältnisse jedesmal sehr verschieden liegen. Allen drei Fällen gemeinsam ist nur dieses, dass sich die Untersuchung wesentlich auf die Umrisspolygone, oder, wie man es gewöhnlich arithmetisch ausdrückt, auf die

Kettenbruchentwickelung stützt. Da der parabolische Fall meistenteils vernachlässigt wird, wollen wir gerade mit diesem beginnen und nachher auf den hyperbolischen und elliptischen Fall kommen, (indem wir also auch hier die gewöhnliche Reihenfolge umkehren).

2. Das Äquivalenzproblem im parabolischen Falle.

Die parabolische Entfernung war

$$r = \sqrt{f} = Ax + By.$$

Bei der Construction der (zusammenfallenden) Fundamentalstrahlen

$$Ax + By = 0$$

ergibt sich eine wesentliche Fallunterscheidung, jenachdem *A und B commensurabel oder incommensurabel* sind. Im ersten Falle gibt es auf der Fundamentallinie unendlich viele, im zweiten Falle gar keine Gitterpunkte (ausser 0).

Die Frage nach der Aequivalenz zweier Formen wird nun allemal so beantwortet, dass man die gegebenen Formen in eine gewisse, eindeutig definirte Normalform bringt oder wie man

es in der Zahlentheorie seit Lagrange ausdrückt, daß man zu den gegebenen Formen reducirte Formen construirt. Je nachdem diese übereinstimmen oder nicht, sind die gegebenen Formen äquivalent oder nicht. Diese Methode ist Ihnen von der Geometrie her durchaus geläufig. Wenn sie z. B. entscheiden wollen, ob zwei analytisch gegebene Kegelschnitte geometrisch identisch sind, können Sie doch so verfahren, daß Sie beide Kegelschnitte etwa auf die Hauptaxen transformiren. Sind die transformirten Gleichungen identisch, so waren es die Kegelschnitte auch vor der Transformation, sind sie verschieden, so sind auch die Kegelschnitte gewiss verschieden.

1ter Fall. Wenn A und B commensurabel sind, so ist die Herstellung einer Normalform sehr leicht. Wir können dann nämlich den Ausdruck für r folgendermassen schreiben:

$$r = m(\alpha x + \beta y),$$

wo α und β teilerfremde ganze Zahlen,

m eine geeignete rationale Zahl ist.
Zu den Zahlen α und β wissen wir zwei andere Zahlen γ und δ zu finden von der Beschaffenheit, dass

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

wird. Machen wir nun die affine Transformation

$$X = \alpha x + \beta y, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$
$$Y = \gamma x + \delta y,$$

so ergiebt sich als reducirte Form die folgende:

$$r = m X.$$

Sei ferner eine zweite parabolische Form f' gegeben, für welche

$$r' = \sqrt{f'} = A' x' + B' y'.$$

Durch eine neue Transformation $\begin{pmatrix}\alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}$ bringen wir auch r' in die Form

$$r' = m' X.$$

Das Resultat dieser Betrachtung ist folgendes:

<u>Zwei parabolische Formen f und f' sind dann und nur dann aequivalent, wenn ihre Multiplicatoren m und m' übereinstimmen.</u>

Die Kettenbrüche (Umrisspolygone)

kamen hierbei nur insofern zur Geltung, als wir mit der diophantischen Gleichung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ zu thun hatten.

<u>2ter Fall.</u> Wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ incommensurabel sind, so schreiben wir den Ausdruck für r folgendermassen:

$$r = \mathfrak{A}(x - \omega y),$$

wo $\omega = -\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$ eine irrationale Zahl ist. Eine zweite Linearform sei

$$r' = \mathfrak{A}'(x' - \omega' y').$$

Sollen r und r' aequivalent sein, so müssen jedenfalls auch die zugehörigen Werte von ω und ω' untereinander durch eine lineare Transformation $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ zusammen hängen, auch diese müssen, wie wir kurz sagen, aequivalent sein. Eine notwendige Bedingung für die Aequivalenz beider Formen ist daher die Gleichung:

$$\omega = \frac{\alpha\omega' + \beta}{\gamma\omega' + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$$

Im vorhergehenden Falle commensurabler $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ ist dieser Ansatz von Hause aus möglich und eben darum gar nicht zur Sprache gekommen.

Um zu entscheiden, ob diese Bedingung erfüllt ist, markiren wir uns in der x, y Ebene sowohl wie in der $x' y'$ Ebene die Gitter der ganzzahligen Punkte und legen durch sie die beiden ω-Linien hindurch

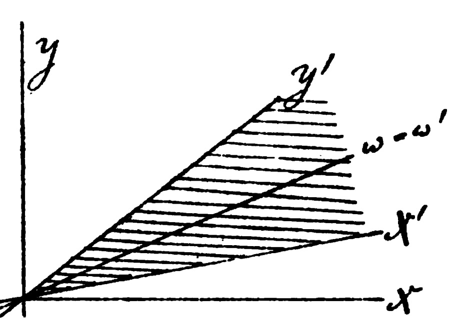
$$x - \omega y = 0 \quad \text{und} \quad x' - \omega' y' = 0$$

Fig. 2

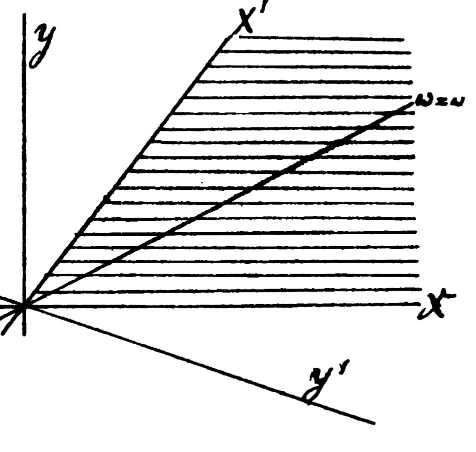
Die Frage ist nun: können diese beiden Figuren durch Parallelprojection zur Deckung gebracht werden? Dabei kommt es lediglich darauf an, die Punktgitter und die ω-Linien in einander überzuführen; die Coordinatenaxen, welche nichts mit der Aequivalenzfrage zu thun haben, dürfen auch nach der Transformation verschieden sein.

Fig. 1

Nehmen wir an, es sei uns diese Überführung gelungen. Dann entsteht eine „Doppelfigur" mit vereinigt gelegenen ω-Linien und Punktgittern, bei welcher wir noch



4 verschiedene Möglichkeiten unterscheiden können, je nachdem die positive x'-Axe oder die positive y'-Axe in das Innere des ersten Quadranten der x y Ebene zu liegen kommt, oder nicht. Gleichviel welcher von diesen Fällen vorliegen möge, so giebt es jedenfalls ein Gebiet, welches gleichzeitig dem positiven x, y-Quadranten und dem positiven x' y'-Quadranten angehört. In der ersten Figur ist es beispielsweise der



von der x'- und y'-Axe, in der zweiten

der von der x'- und x-Axe eingeschlossene schraffirte Sector.

Nun construiren wir im ersten Quadranten der x, y-Ebene und im ersten Quadranten der x', y'-Ebene die Umrisspolygone (vergl. die Figuren der Seite 97), welche die w-Linie und die w' Linie umgeben. Dieselben sind, wie wir wissen, durch die Lage dieser Linien im Punktgitter völlig bestimmt. In unserer Doppelfigur, wo die w-Linien und die Punktgitter zusammenfallen, werden daher auch die Umrisspolygone identisch, soweit sie im schraffirten Gebiete liegen.

Diese Thatsache haben wir jetzt in's Arithmetische zu übersetzen, indem wir an die zu den Umrisspolygonen gehörigen Kettenbruchentwickelungen denken. Die Teilnenner $\mu_1, \mu_3, \mu_5 \dots \mu_2, \mu_4, \mu_6 \dots$ des Kettenbruchs haben in der Figur des Umrisspolygons ihre bestimmte Bedeutung. Wenn also, wie wir sahen, die Umrisspolygone von w und w'

von einer gewissen Stelle ab zusammenzufallen, so müssen auch die Teilnenner in den beiderseitigen Kettenbruchentwickelungen von einer gewissen Stelle ab ihrer Grösse und ihrer Aufeinanderfolge nach übereinstimmen. Wir kommen daher zu dem folgenden Resultat:

<u>Sollen zwei irrationale Grössen ω und ω' aequivalent sein, so ist dazu jedenfalls erforderlich, daß ihre Kettenbrüche von einer bestimmten Stelle ab identisch werden.</u>

Man erkennt aber auch leicht, daß diese Bedingung hinreichend ist. Es seien nämlich die Kettenbruchentwickelungen

$$\omega = \mu_1 + \frac{1}{\mu_2 + \cdots + \frac{1}{\mu_\nu + \frac{1}{\Omega}}}, \quad \omega' = \mu'_1 + \frac{1}{\mu'_2 + \cdots + \frac{1}{\mu'_{\nu'} + \frac{1}{\Omega'}}};$$

dann haben wir, wie früher (pag 10), die Bezeichnung:

$$\omega = \frac{p_\nu \Omega + p_{\nu-1}}{q_\nu \Omega + q_{\nu-1}}, \quad p_\nu q_{\nu-1} - q_\nu p_{\nu-1} = (-1)^\nu$$

Diese Gleichung besagt, dass ω und Ω

aequivalent sind. Ebenso sind auch ω und Ω' aequivalent. Setzen wir nun voraus, dass die Kettenbrüche von einer gewissen Grenze ab übereinstimmen, dass etwa $\Omega = \Omega'$ wird, so folgt daraus sofort, dass ω und ω' unter einander aequivalent sind. Die Determinante der affinen Substitution $\omega = S(\omega')$ ist dabei gleich dem Producte aus den Determinanten der Substitutionen $\omega = S_1(\Omega)$ und $\omega' = S_2(\Omega')$; sie ist also gleich $(-1)^{r+r'}$. Danach sind ω und ω' eigentlich aequivalent, wenn r und r' gleichzeitig gerade oder ungerade sind; sie sind uneigentlich aequivalent, wenn eine der Zahlen r und r' gerade, die andere ungerade ist. Ersteres findet in Figur 1 von pg. 98. statt. Wenn hier nämlich der erste Eckpunkt der Polygonzüge, welcher in das schraffirte Gebiet fällt, rechts von ω liegt, so sind r und r' beide gerade; wenn er links von ω fällt, so sind r und r' beide ungerade.

Letzteres findet in Figur 2 statt. Denn hier gehört zu dem ersten Eckpunkt, welcher in das schraffirte Gebiet fällt, ein gerades r und ein ungerades r' oder ein ungerades r und ein gerades r'! Allgemein werden ω und ω' eigentlich oder uneigentlich aequivalent werden, je nachdem der Sinn, in dem die Geraden x, ω, y und die Geraden x', ω', y' auf einander folgen, der gleiche oder der entgegengesetzte ist.

Wir haben schliesslich anzugeben, welche weitere Bedingung zu der Äquivalenz der Zahlen ω und ω' hinzukommen muss, damit auch die Linearformen r und r' aequivalent werden. Durch Umkehrung der Substitution $\omega = S(\Lambda)$ von pg. 101 ergibt sich

$$\Lambda = \frac{-\omega q_{r-1} + p_{r-1}}{\omega q_r - p_r}$$

oder wegen der ursprünglichen Bedeutung von ω

$$\Lambda = -\frac{A p_{r-1} + B q_{r-1}}{A p_r + B q_r}.$$

Ebenso wird

$$\Lambda' = -\frac{A' p'_{r'-1} + B' q'_{r'-1}}{A' p'_{r'} + B' q'_{r'}}$$

Ist nun $\Lambda = \Lambda'$, so können wir zunächst nur schliessen

$$\frac{A p_{r-1} + B q_{r-1}}{A p_r + B q_r} = \frac{A' p'_{r'-1} + B' q'_{r'-1}}{A' p'_{r'} + B' q'_{r'}}.$$

Die Nenner dieses Ausdruckes bedeuten die Werte der Linearformen r und r' im Punkte (r). Sollen die Formen aequivalent sein, so müssen diese Werte übereinstimmen. Stimmen aber die Nenner (oder die Zähler) jenes Ausdruckes überein, so folgt auch für alle folgenden Näherungspunkte die Gleichheit von r und r'.

Wir erkennen daraus: *Sind w und w' aequivalent so sind es auch die Linearformen r und r', vorausgesetzt, dass sie in einem der zugehörigen gemeinsamen Näherungspunkte denselben Wert haben.*

3. Das Äquivalenzproblem im hyperbolischen Falle.

Wir betrachten eine Form vom hyper-

bolischen Typus

$f = ax^2 + bxy + cy^2$, wo $b^2 - 4ac > 0$.

Die Coefficienten a, b, c lassen wir zunächst beliebig, wir werden dann später um so besser verstehen, welche besonderen Verhältnisse im ganzzahligen Falle statt haben.

Die Wurzeln der Gleichung $f = 0$ liefern uns die Fundamentalstrahlen $x/y = \omega_1$ und $x/y = \omega_2$. Von den drei Fällen, welche hier zu unterscheiden wären: beide Zahlen ω_1, ω_2 rational, – eine Zahl rational, die andere irrational, – beide Zahlen irrational, wollen wir nur den letzten berücksichtigen. Übrigens scheidet, wenn die Coefficienten ganzzahlig sind, der zweite Fall von selbst aus, während sich der dritte Fall dahin specialisirt, daſs die beiden irrationalen Zahlen conjugirte Irrationalitäten werden.

Eine zweite Form sei:

$f' = a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2$;

dieselbe liefere gleich Null gesetzt die beiden Wurzeln ω'_1 und ω'_2.

Wir construiren uns in der x, y - und in der x', y' - Ebene die Linien ω_1, ω_2 und ω_1', ω_2' und markiren ausserdem die Punktgitter. Sollen die so entstehenden Figuren affin verwandt sein, so müssen ausser den Punktgittern auch die ω - Geraden paarweise in einander übergehen. Es müssen also Gleichungen der folgenden Art bestehen:

$$\omega_1 = \frac{\alpha\omega_1' + \beta}{\gamma\omega_1' + \delta}$$

$$\omega_2 = \frac{\alpha\omega_2' + \beta}{\gamma\omega_2' + \delta}$$

Eine solche Gleichung zwischen zwei Grössen ω besteht, wie wir im vorigen Falle sahen, dann, wenn die Kettenbruchentwickelungen von einer gewissen Stelle ab übereinstimmen. Vorausgesetzt, dass dieses bei den Paaren ω_1, ω_1' und ω_2, ω_2' einzeln statt hat, so können die Substitutionen $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, durch welche die beiden ω zusammenhängen, noch verschieden ausfallen. Für die vorliegende Frage aber müssen wir, den letztgenannten Gleichungen ent=

sprechend, verlangen, dass die beiden ω-Linien nebst den Punktgittern durch ein und dieselbe affine Transformation ineinander übergehen. Wir sind daher auf ein neues Hülfsmittel angewiesen, das uns die Kettenbruchsentwickelungen von ω_1 und ω_2 (bez. von ω_1' und ω_2') in Verbindung setzt.

Da bemerken wir, dass die Abgrenzung des Punkthaufens im parabolischen Falle durch die ω-Linie einerseits und durch eine Coordinatenaxe andererseits nur eine künstliche war, welche nicht aus dem Wesen unserer Figuren hervorging. Im hyperbolischen Falle, wo wir zwei ω-Linien haben, liefern uns diese selbst eine natürliche Begrenzung. Wir werden unsere Umrisspolygone daher jetzt ohne Rücksicht auf die Coordinatenaxen construiren können und einfach alle diejenigen Gitterpunkte durch ein Umrisspolygon eingrenzen, welche einem der vier durch die ω-Linien gebildeten Quadranten angehören. So bekommen wir vier natürliche Umrisspolygone, welche sich beiderseitig in's Un-

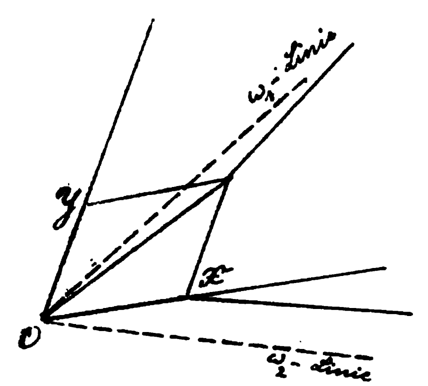
endliche erstrecken und übrigens paar-weise einander gleich werden. Solche Umrisspolygone haben wir in der x, y- und in der x', y'-Ebene. Sollen die Figuren der beiden Ebenen affin verwandt sein, so müssen diese natürlichen Umrisspolygone in einander projicirt werden können.

Do. d. 5. XII. Wir beschäftigen uns im Folgenden mit dem geometrischen Studium der natürlichen Umrisspolygone, wobei wir bequemer Weise an die bereits untersuchten Eigenschaften der Kettenbruchpolygone anknüpfen werden. Da von den 4 Polygonen je zwei mit einander congruent sind, brauchen wir nur von 2 Polygonen zu sprechen (die wir vorübergehend P und P' nennen)

Wir beginnen damit, ein für unsere Betrachtung geeignetes Coordinatensystem zu definiren. Wir wählen als Einheitsvector der x-Axe die Strecke von O nach irgend einem Gitterpunkte auf einem der beiden Umrisspolygone (sagen wir auf P). Schreiten wir

von diesem Punkte aus längs einer Polygonseite von P' fort, so kommen wir auf dieser sicher noch zu einem zweiten Gitterpunkte.

Zur Verbindungsstrecke von jenem nach diesem Gitterpunkte ziehen wir durch O eine Parallelstrecke. Der Endpunkt der letzteren



fällt gleichfalls auf einen Gitterpunkt, u. zw. auf einen Gitterpunkt des Umrisspolygones P'! Diese Parallelstrecke wählen wir als Einheitsvector der y-Coordinate.

Es zeigt sich, daſs das von diesen Einheitsvectoren bestimmte Parallelogramm in seinem Innern keinen Gitterpunkt enthalten kann. Für die eine (in der Figur schraffirte) Hälfte des Parallelogramms ist dieses nach den Eigenschaften der Umrisspolygone evident. Wegen der Symmetrie der Gitterfigur kann dann aber auch die andere (nicht schraffirte) Hälfte einen

Gitterpunkt in ihrem Innern nicht enthalten. Das so definirte Coordinatensystem besitzt daher ein Elementarparallelogramm vom Flächeninhalte 1; es ist ein Elementarcoordinatensystem. Ausserdem besitzt es die für das folgende wesentliche Eigenschaft, dass seine Axen durch die w-Linien der indefiniten Form getrennt werden. Da nämlich der x-Vector auf dem einen, der y-Vector auf dem anderen Umrisspolygon der w-Linien endigt, so liegt die eine Fundamentallinie (sagen wir w_1) im ersten, die andere (w_2) im zweiten Quadranten des x, y-Systems. Sind die Gleichungen der beiden Geraden in unserem Coordinatensystem

$$\frac{x}{y} = \Lambda_1 \text{ und } \frac{x}{y} = \Lambda_2$$

so haben in Folge dessen Λ_1 und Λ_2 verschiedene Vorzeichen. Jedes Coordinatensystem, für welches dieses zutrifft, nennen wir ein <u>reducirtes</u> Coor-

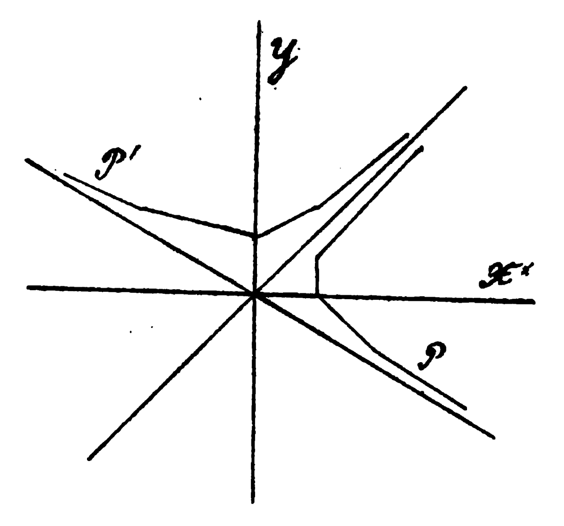
dinatensystem, desgleichen bezeichnen wir unsere hyperbolische Form, nachdem wir sie auf ein solches Coordinatensystem transformirt haben, als reducirte Form. Ist

$$F = A x'^2 + B' x' y' + C y'^2$$

eine reducirte Form, so folgt aus dem ungleichen Vorzeichen der Wurzeln von $F = 0$ unmittelbar, dass die Coefficienten A und C ihrerseits ungleiches Vorzeichen besitzen. Umgekehrt hat auch jede indefinite Form in welcher A und C verschiedenes Vorzeichen haben, zwei Wurzeln von entgegengesetztem Zeichen. Wir können daher die Definition der reducirten Formen hier kurz folgendermassen fassen: Eine reducirte Form ist eine solche, für welche $AC < 0$ ist.

Die Beziehung zwischen den natürlichen Umrisspolygonen und den Polygonzügen der zu den Fundamentallinien gehörigen Kettenbruchentwickelungen gestaltet sich in einem reducirten Coordinatensystem besonders einfach. Entwickeln wir nämlich λ_1 in einen Kettenbruch, so erhalten wir zwei Polygonzüge, welche nach der früher gegebenen

independenten geometrischen Construction jener Polygonzüge notwendiger Weise Teile unserer natürlichen Umrisspolygone P und P' sind. Es sind nämlich die im ersten Quadranten des X', Y-Systems gelegenen Stücke von P und P'. Entwickeln wir ferner Λ_2 in einen Kettenbruch, so sind zu-



gehörigen Polygonzüge dieses Kettenbruchs die übrig bleibenden Teile der natürlichen Umrisspolygone, nämlich die im 2ten und 4ten Quadranten gelegenen Stücke von P und P'. <u>In einem reducirten Coordinatensystem setzen sich also die natürlichen Umrisspolygone aus den Kettenbruchpolygonen der Wurzeln Λ_1 und Λ_2 direct zusammen.</u> Bei

einem nicht reducirten Coordinatensystem dagegen liegen die Verhältnisse nicht ganz so einfach.

Daraufhin übertragen sich die Eigenschaften der Kettenbruchpolygone von Λ_1 und Λ_2 ohne Weiteres auf die natürlichen Umrisspolygone. Wir haben die folgenden Punkte hervor:

1. <u>Zu jeder Seite des einen Polygonzuges (P) gehört eine bestimmte Ecke des anderen (P').</u> Wir haben nämlich bei der Construction der Kettenbrüche die Seite $(r-1)(r+1)$ dadurch erhalten, dass wir durch $(r-1)$ eine Parallele zu dem Vector $O(r)$ zogen. Der Punkt (r) ist daher der Seite $(r-1)-(r+1)$ eindeutig zugeordnet, wir bezeichnen ihn als den jener Seite „<u>gegenüberliegenden</u>" Eckpunkt.

2. Die Seite $(r-1)-(r+1)$ brauchte dabei nicht gerade die Länge des Vectors $O(r)$ zu besitzen. Sie konnte auch ein ganzzahliges, (μ-faches) Multiplum jenes Vectors sein. In dieser Weise gehörte zu jeder Seite der Kettenbruchpolygone eine ganze Zahl μ, welche gleich der um 1 vermehrten

Anzahl der Nebenpunkte im Innern der Seite war. Dementsprechend gehört auch zu jeder Seite unserer natürlichen Umrisspolygone eine ganze Zahl μ. Wir versehen diese Zahlen in der Weise mit Indices, dass sich die Zahlen μ_r mit ungeradem Index auf die Seiten von P die mit geradem Index auf die Seiten von P' beziehen. Dadurch bekommen wir zwei Reihen beiderseitig in's Unendliche verlaufender ganzer Zahlen, welche so wie die Reihen der geraden und ungeraden Zahlen in ihrer natürlichen Folge geordnet sind:

$$\ldots \mu_{-3}\ ;\ \mu_{-1}\ ,\ \mu_1\ ,\ \mu_3\ ,\ \ldots$$
$$\ldots\ ,\ \mu_{-2}\ ,\ \mu_0\ ,\ \mu_2\ ,\ \mu_4\ ,\ \ldots$$

3. Wir können diese Zahlenreihen an sich ganz beliebig annehmen und dadurch die Lage der Geraden willkürlich Λ_1 und Λ_2 festlegen. In der That setzen sich aus jeder solchen Zahlenreihe zwei Kettenbrüche zusammen, durch welche immer ein und nur ein Wertepaar $\Lambda_1\ \Lambda_2$ bestimmt wird.

Wir gehen nun dazu über, diese Ideen für das Aequivalenzproblem der indefiniten Formen zu fructifiziren. Der genaueren Durchführung stellen wir zunächst eine kurze Übersicht der abzuleitenden Resultate voraus.

1. Von einer vorgelegten indefiniten Form

$$f = ax^2 + bxy + cy^2$$

gelangen wir zu einer reducirten Form

$$F = AX^2 + BXY + CY^2$$

durch Einführung eines reducirten Coordinatensystems, in dem wir den Einheitsvector OX nach einem Gitterpunkt einer beliebigen Polygonecke von P, den Einheitsvector OY nach dem gegenüberliegenden Eckpunkte von P' ziehen.

2. Diese Einführung ist auf sehr verschiedene Arten möglich. Es gehört daher zu einer indefiniten Form f eine ganze Serie reducirter Formen F. Dabei erhalten wir die ganze Serie aus einer einzelnen reducirten Form, indem wir den X- und den Y-Vector in gesetzmässiger Weise alternirend

längs der Seiten der Umrisspolygone entlang schieben.

3. Die Bedingung für die „Aequivalenz" zweier gegebener indefiniter Formen besteht dann einfach darin, dass die Serien der reducirten Formen oder auch nur irgend ein Paar reducirter Formen aus den beiderseitigen Serien überein-stimmen muss.

Frei. d. 6. XII. Wir beginnen mit einigen Détails über die reducirten Formen.

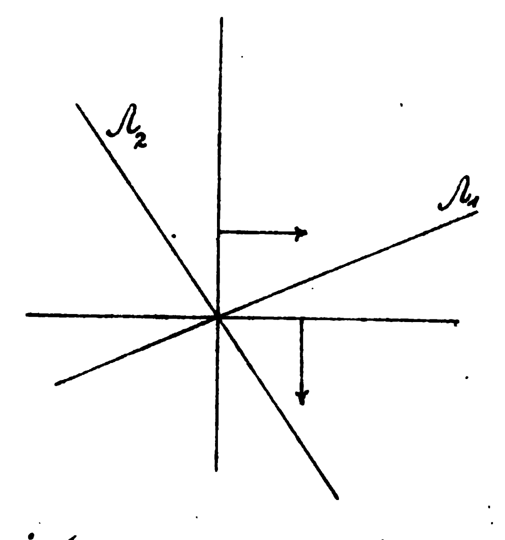
Als Kennzeichen für eine reducirte Form fanden wir die Ungleichung: $AC < 0$.

Wir können es dabei noch so einrichten, dass speciell $A > 0$ und $C < 0$ wird: Ist nämlich das Umgekehrte der Fall, so brauchen wir nur die Benennung des x- und des y-Vectors, und also auch die der Coefficienten A und C zu vertauschen, um auf die vorstehenden Ungleichungen zu kommen. Nach dieser Verabredung werden also die reducirten Formen stets in demjenigen durch die Λ_1- und Λ_2-Linie begrenzten Doppelvector positiv sein,

in welchem die x- Axe enthalten ist.

Wir machen sodann einen Unterschied zwischen Hauptreducirten und Nebenreducirten. Wir nennen eine Form hauptreducirt dann, wenn sowohl der x-wie der y- Vector ihres Coordinatensystems nach einem Hauptpunkte der Umrisspolygone verläuft, nebenreducirt dann, wenn einer dieser Vectoren in einem Nebenpunkte endigt. (Der andere Vector endigt dann sicher in einem Hauptpunkte, nämlich in demjenigen Gitterpunkte, welcher der Polygonseite des Nebenpunktes gegenüberliegt und welcher notwendig ein Eckpunkt des anderen Umrisspolygones ist.) Innerhalb der Haupt- und Nebenreducirten unterscheiden wir ferner noch je zwei Möglichkeiten a) und b). Wir betrachten zunächst die Hauptreducirten. Durch den Endpunkt des y- bez. x- Vectors geht je eine Seite der Umrisspolygone hindurch, welche parallel der x- bez. y- Axe verläuft. Im Falle a) möge die Poly-

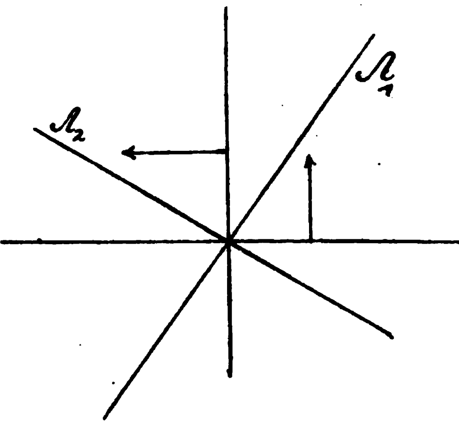
gonseite durch den Einheitspunkt auf der Y-Axe nach dem ersten Quadranten hin verlaufen. Dann zieht die der Y-Axe parallele Polygonseite im Einheitspunkte der X-Axe in den 4ten Quadranten hinein. Wir zeichnen unser Coordinatensystem der Einfachheit halber als gewöhnliches rechtwinkeliges Coordinatensystem. Die Linie Λ_1 liegt dann notwendiger Weise zwischen der X-Axe und der Winkelhalbirenden des ersten Quadranten, die Linie Λ_2 zwischen der y-Axe und der Winkelhalbirenden des zweiten Quadranten. In diesem Falle ist



$$|\Lambda_1| > 1, \quad |\Lambda_2| < 1.$$

<u>Im Falle c.)</u> der Hauptreducirten möge die Polygonseite durch den Endpunkt

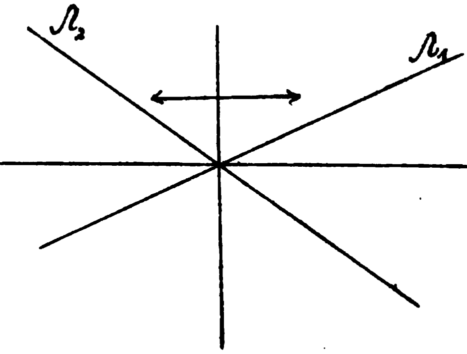
des y-Vectors in den 2. Quadranten hinein verlaufen. Dann weist die Polygonseite im Einheitspunkt der x-Axe nach dem ersten Quadranten hin. Dementsprechend ändert sich die Lage der Linien Λ_1 und Λ_2. Wir haben in diesem Falle:



$$|\Lambda_1| < 1 \quad , |\Lambda_2| > 1.$$

Bei den Nebenreducirten ist einer der Einheitspunkte ein Nebenpunkt, d. h. ein innerer Gitterpunkt einer Polygonseite. Sei dieses im Falle a.) der Einheitspunkt auf der y-Axe, im Falle b.) der auf der x-Axe.

Im Falle a verlaufen die Λ-Linien beide zwischen der (positiven bez. negativen) x-Axe u.



den Winkelhalbirenden. In diesem Falle ist also

$$|\lambda_1| > 1, \quad |\lambda_2| > 1$$

Im Falle b.) liegen die λ-Linien zwischen der y-Axe und den beiden Winkelhalbirenden. Es wird daher $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| < 1$.

λ_2 λ_1

Um die Wurzelverteilung in den verschiedenen Fällen noch besser übersehen zu können, repräsentiren wir uns die möglichen Werte von x/y je durch eine besondere Gerade. Wir haben auf dieser die folgende relative Lage der Werte $\lambda_1, \lambda_2, +1, 0, -1$ gegen einander: im Falle der Hauptreducirten

a)

$\mathfrak{F} > 0$. $\quad \mathfrak{F} < 0 \quad \mathfrak{F} < 0$

$-1 \quad \lambda_2 \quad 0 \quad +1 \quad \lambda_1$

b.)

$\mathfrak{F} < 0$. $\quad \mathfrak{F} < 0 \quad \mathfrak{F} > 0$

$\lambda_2 \quad -1 \quad 0 \quad \lambda_1 \quad +1$

im Falle der Nebenreducirten

a)

$$\underset{\Lambda_2}{} \quad \overset{F<0}{-1} \quad \overset{F>0}{0} \quad \overset{F<0}{+1} \quad \underset{\Lambda_1}{}$$

b)

$$\overset{F>0}{-1} \quad \Lambda_2 \quad \overset{F<0}{0} \quad \Lambda_1 \quad \overset{F>0}{+1}$$

Wir tragen ferner in unsere Schemata Vorzeichen von F in den Punkten $+1$ und -1 ein. Da nach Verabredung F längs der x Axe positiv, so ist es längs der y-Axe negativ. Dem Punkte $x/y=0$ kommt daher in allen 4 Fällen das negative Vorzeichen zu. Dasselbe Vorzeichen gilt auch nach beiden Seiten von 0 aus bis an die Stellen Λ_1, Λ_2 heran und geht jenseits derselben in das positive über. Danach ist es klar, welche Vorzeichen der Form an den Stellen $+1$ und -1 stattfinden. Wir erkennen: Unsere 4 Fälle sind durch diese Vorzeichen von einander unterschieden.

Wir können hierauf sofort die arithmetischen Kriterien für unsere 4 Fälle hinschreiben. Wir erhalten nämlich,

indem wir $x = 1$, $y = 1$, bez. $x = -1$, $y = 1$ in F einsetzen, die folgenden Ungleichungen:

Im Falle der Hauptreducirten

a)
$$\begin{cases} \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} < 0, \\ \mathfrak{A} - \mathfrak{B} + \mathfrak{C} > 0, \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} > 0, \\ \mathfrak{A} - \mathfrak{B} + \mathfrak{C} < 0. \end{cases}$$

im Falle der Nebenreducirten

a)
$$\mathfrak{A} \pm \mathfrak{B} + \mathfrak{C} < 0$$

b)
$$\mathfrak{A} \pm \mathfrak{B} + \mathfrak{C} > 0.$$

Dazu kommen noch als allgemeingültige Bedingungen für reducirte Formen die folgenden:

$$\mathfrak{A} > 0 \text{ und } \mathfrak{C} < 0.$$

In den arithmetischen Darstellungen unserer Theorie, wo diese Einteilung, wenigstens was die Hauptreducirten angeht, gleichfalls gemacht wird, erscheint sie als etwas sehr Willkürliches, während sie sich vom geometrischen Standpunkte aus auf dem hier eingeschla-

genen Wege ganz von selbst darbietet. Man möchte fast vermuten, daß Gauß selbst bei der Entdeckung dieser Dinge von geometrischen Anhaltspunkten geleitet worden ist und daß er diese, seiner bekannten (aber nicht nachahmenswerten) Publicationsmethode zufolge, späterhin absichtlich unterdrückt hat.

Wir untersuchen nun das Gesetz, nach welchem man aus einer reducirten Form die zugehörige unbegrenzte Reihe der übrigen reducirten Formen ableiten kann. Wir nehmen an, es sei eine Hauptreducirte des Falles a) vorgelegt:

$F.\ A_1 X_1^2 + B_1 X_1 Y_1 + C_1 Y_1^2$

und wir sollen mit unserer Reihe an R_1 entlang schreiten. Liegt der Fall b) vor, so ist einfach X und Y zu vertauschen; sollen wir an R_2 entlang schreiten, so haben wir die ganze Reihe der Operationen umzukehren. Unser ursprüngliches reducirtes Coordinatensystem X_1, Y_1 ändern wir nun in gesetzmässiger Weise so ab, daß es beständig ein reducirtes Coordinatensystem bleibt.

Wir beginnen damit, den y-Vector der X-Axe parallel um eine Einheit zu verschieben. Sein Endpunkt wandert dabei auf P' vergl. die erste Figur auf pag 117. Analytisch bedeutet dieses, dafs wir die Substitution

$$x_1 = x_1' + y_1'$$
$$y_1 = y_1'$$

ausüben, die wir früher als Substitution S bezeichneten. Unsere Form geht dabei über in

$$A_1 x_1'^2 + (2A_1 + B_1) x_1' y_1' + (A_1 + B_1 + C_1) y_1'^2,$$

welche neue Form nach den geometrischen oder auch nach den arithmetischen Kriterien des Falles a) sicher gleichfalls eine reducirte ist. Es kann aber sein, dafs wir diese Verschiebung noch ein zweites Mal ausführen können, ohne dass unsere Form aufhörte, eine reducirte zu sein, dann vielleicht ein drittes Mal, etc. etc. Sei die grösste Anzahl von Malen, dafs dieses möglich ist, μ_1. Dann ist die durch die Substitution S^{μ_1} aus F abgeleitete Form

$$(A_1, 2A_1\mu_1 + B_1, A_1\mu_1^2 + B_1\mu_1 + C_1)$$

noch eine reducirte Form, ihr letzter Coefficient $\mathfrak{A}_1\mu_1^2 + \mathfrak{B}_1'\mu_1 + \mathfrak{C}_1$ also noch negativ. Durch abermalige Ausübung der Substitution S dagegen wird eine Form entstehen, deren letzter Coefficient positiv ist. Denn wir würden bei nochmaliger Verschiebung des y-Vectors di $\mathfrak{A}_1$-Linie überschreiten. Die Zahl μ_1 können wir daher arithmetisch so definiren: Es ist die grösste ganze Zahl, für welche die Ungleichung besteht:

$$\mathfrak{A}_1\mu_1^2 + \mathfrak{B}_1'\mu_1 + \mathfrak{C}_1 < 0$$

Setzen wir nun

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2,\ 2\mathfrak{A}_1\mu_1 + \mathfrak{B}_1' = \mathfrak{B}_2',\ \mathfrak{A}_1\mu_1^2 + \mathfrak{B}_1'\mu_1 + \mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_2,$$

so ist

$$(\mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{B}_2',\ \mathfrak{C}_2)$$

wiederum eine hauptreducirte Form, aber eine b). Denn es ist jetzt

$$\begin{Bmatrix} \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_2' + \mathfrak{C}_2 > 0 \\ \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{B}_2' + \mathfrak{C}_2 < 0 \end{Bmatrix}$$

Wir sagen, dass

$$\mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{B}_2',\ \mathfrak{C}_2.$$

auf die Hauptreducirte $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1', \mathfrak{C}_1)$ bei der gewählten Fortschreitungsrichtung längs $\mathfrak{P}'$ zuerst folgt.

Nun operiren wir in ähnlicher Weise

mit dieser Form (A_2, B_2', C_2), indem wir nun die Rolle von x und y vertauschen. Wir verschieben den x-Vector ihres Coordinatensystems (x_2, y_2) parallel der y_2-Axe um so viele Einheiten, als möglich, d. h. solange als die Form dabei reducirt bleibt. Analytisch bedeutet dieses, dass wir die Substitution S':

$$\left.\begin{array}{l} x_2 = x_2' \\ y_2 = x_2' + y_2' \end{array}\right\} S'$$

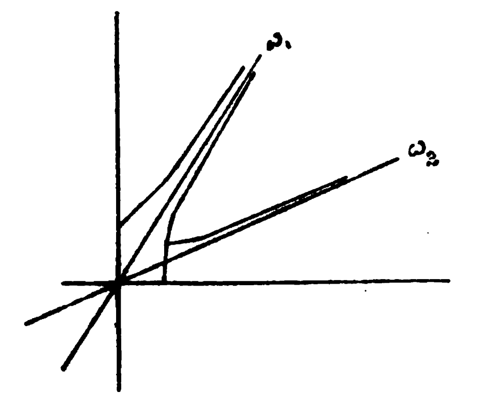
eine Anzahl von Malen (μ_2-mal) ausführen, wobei μ_2 diejenige grösste ganze Zahl ist, für welche

$$A_2 + B_2' \mu_2 + C_2 \mu_2^2$$

noch positiv ist. Die Substitution S'^{μ_2} lässt dann aus (A_2, B_2', C_2) wiederum eine Hauptreducirte a) entstehen, welche wir mit (A_3, B_3', C_3) bezeichnen. An der neuen Hauptreducirten operiren wir in derselben Weise mit der Substitution S und bekommen so fortfahrend eine unbegrenzte Reihe von hauptreducirten Formen. Es ist ferner klar, dass wir diese Operationen von

$(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1)$ ausgehend auch nach rückwärts fortsetzen können und müssen. Auch nach dieser Richtung wird die Reihe der Hauptreducirten eine unbegrenzte sein. Wir schreiten dann eben an Λ_2 entlang. Die Aufstellung der ganzen beiderseitig unendlichen Schaar von Formen ist hiermit erledigt; es handelt sich dabei, wie wir sehen, um eine ganz elementare Rechenvorschrift.

Wir haben noch als Ergänzung des Vorstehenden anzugeben, wie man von einer beliebigen Form f zu einer ersten reducirten Form F gelangen kann. Wir wollen uns den Weg kurz an der Figur klar machen. Wir betrachten die zu den Wurzeln ω_1 u. ω_2 von $f = 0$ gehörigen Kettenbruchentwickelungen. Ihre Umrisspolygone müssen von einer gewissen Stelle ab sich mit den



natürlichen Umrisspolygonen decken. Wenn wir also dasjenige Coordinatensystem, auf welches f ursprünglich bezogen ist, und welches wir als nicht reducirt voraussetzen wollen, längs der Umrisspolygone der Entwickelungen von ω_1 (oder auch von ω_2) in der durch den Kettenbruch indicirten Weise entlang schieben, so bringen wir es durch eine endliche Anzahl solcher Verschiebungen schliesslich in eine Lage, wo seine Einheitsvectoren in Eckpunkten von P und P' endigen, wo also das Coordinatensystem ein reducirtes geworden ist. Gleichzeitig ist dann aus f eine reducirte Form F entstanden. Der Unterschied gegen vorhin ist dabei dieser!

Während wir von einer reducirten Form F zu neuen reducirten mittelst rationaler Kriterien fortschreiten konnten, mussten wir, wie wir gerade schilderten, zur Aufstellung einer ersten F die irrationalen Grössen ω_1, ω_2 selbst bez. ihre Kettenbrüche zu Hülfe nehmen. Es handelt sich eben zunächst noch darum, was bei einer reducirten F

von vorneherein gegeben ist, nämlich die Wurzeln von $f=0$ zu separiren.

Do. d. 12. XII. Wir werden heute untersuchen, welche besonderen Verhältnisse eintreten, wenn wir die Annahme hinzunehmen, dass die gegebene indefinite Form eine ganzzahlige Form ist. Wir nehmen an, dass die Coefficienten der Form commensurabel sind und schreiben dementsprechend

$$f = M(ax^2 + bxy + cy^2),$$

wo a, b, c ganze Zahlen, M einen beliebigen Factor bedeutet. Von den Coefficienten a, b, c nehmen wir ferner an, dass sie teilerfremd sind, d. h. nicht alle drei einen gemeinsamen Factor besitzen. In diesem Falle nennen wir $ax^2 + bxy + cy^2$ eine primitive Form.

Das Resultat der letzten Stunde hinsichtlich der reducirten Formen lautete folgendermassen: Zu jeder Form f giebt es eine beiderseits unbegrenzte Reihe von Hauptreducirten Formen

. . . . .

$$F_1 = (a_1, b_1, c_1)$$

$$F_2 = (a_2\ ,\ b_2\ ,\ c_2)$$
$$F_3 = (a_3\ ,\ b_3\ ,\ c_3)$$

Ist F_1 eine Hauptreducirte des Falles a), so sind es auch $F_3, F_5, \ldots,$ während $F_2, F_4, \ldots$ Hauptreducirte des Falles b) sind. Diese Formen hängen wie die Glieder einer Kette unter einander zusammen; es wird nämlich $a_1 = a_2\ ,\ c_2 = c_3\ ,\ a_3 = a_4$ etc.

Da alle diese Formen unter sich und mit der gegebenen Form durch affine Substitutionen von der Determinante 1 zusammenhängen, so haben sie die gleiche Discriminante

$$D = b^2 - 4\,ac.$$

Sei $F = (A, B, C)$ eine beliebige Form aus der Reihe der reducirten. Da unserer Verabredung nach bei reducirten Formen $C < 0$, schreiben wir der Deutlichkeit halber $-C'$ statt C, setzen also

$$F = (A, B, -C').$$

wo jetzt C' und ebenso A positive Zahlen sind. Die Discriminante von F hat dann folgende Gestalt:

$\mathfrak{D}' = \mathfrak{B}'^2 + 4\,\mathfrak{A}\mathfrak{C}'$.

Jetzt bringen wir unsere Voraussetzung zur Geltung, dass $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{D}'$ ganze und dass $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{D}'$ positive Zahlen sind. Auf diese Voraussetzung gründen wir einen specifisch zahlentheoretischen Schluss von übrigens äusserst einfachem Character. Wir denken nämlich $\mathfrak{D}'$ als feste Zahl gegeben und fassen die vorstehende Gleichung als Diophantische Gleichung zur Bestimmung der Unbekannten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ auf. Wir können dann sofort sagen: es gibt nur eine endliche Anzahl von ganzzahligen Lösungen dieser Gleichung mit positiven Werten von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}'$. Um sie alle zu bekommen, können wir so verfahren: Wir setzen $\mathfrak{B}' = 0, 1, 2 \ldots E(\sqrt{\mathfrak{D}'})$ (wo $E(\sqrt{\mathfrak{D}'})$ die grösste ganze Zahl $\leqq \sqrt{\mathfrak{D}'}$ bedeutet) und sehen zu, ob $\mathfrak{D}' - \mathfrak{B}'^2$ durch 4 teilbar ist oder nicht. Im letzteren Falle hat die Gleichung sicher keine Lösung, im ersteren zerlegen wir $\mathfrak{D}' - \mathfrak{B}'^2$ auf alle mögliche Weise in Factoren.

So erhalten wir alle möglichen Werte von A, C' und B.

Das Resultat dieser Betrachtung ist der folgende wichtige Satz: <u>Zu einer gegebenen Discriminante gehört nur eine endliche Anzahl reducirter Formen (A, B, C).</u>

Nun hatten wir gelernt aus einer Form eine unendliche Serie reducirter Formen

$$\ldots F_{-1}, F_0, F_1, F_2, \ldots$$

zu erzeugen. Da überhaupt nur eine endliche Anzahl von solchen Formen zur Verfügung steht, muss eine Form in dieser Serie mehrmals vorkommen. Sei F_1 diese Form; dann gibt es eine erste Form F_{r+1}, welche dieselben Coefficienten, A, B, C hat, wie F_1. Nun entstand aus F_1 durch einen gewissen Process die ganze Reihe der Formen F. Sind wir bei diesem Process bis F_{r+1} gekommen, so haben wir, um zu F_{r+2} etc. zu kommen, mit F_{r+1} dieselben Operationen vorzunehmen, wie mit F_1. Wir werden daher beidemal dieselben Formen erhalten: $F_{r+2} = F_2$, $F_{r+3} = F_3$, $\ldots F_{2r+1} = F_{r+1} = F_1$ etc. Wir können auch von F_1 nach rück-

wärts gehen und finden auf dieselbe Weise $F_0 = F_r$, $F_{-1} = F_{r-1}$ etc. Daraus folgt:

Die Serie der reducirten Formen ist periodisch und besteht aus derselben immer fortgesetzten Wiederholung derselben r Formen.

Eine erste Bemerkung, die wir an diesen Satz knüpfen, bezieht sich auf das Aequivalenzproblem. Wir sagten 2 Formen f und f' sind äquivalent, wenn die zugehörigen Reihen der reducirten Formen $F_{-1}, F_0, F_1 \ldots F'_{-1}, F'_0, F'_1 \ldots$ übereinstimmen. Um dieses zu entscheiden, können wir aus der einen Reihe eine Form (z. B. F_1) herausgreifen und zusehen, ob sich in der anderen Reihe eine Form $F' = F_1$ vorfindet. Darin liegt aber zunächst eine gewisse Schwierigkeit. Wenn wir nämlich eine Reihe von Formen F' berechnet und die Form F_1 darunter nicht angetroffen haben, so können wir daraus noch nicht schliessen, dass f und f' nicht äquivalent sind. Denn F_1 könnte ja gerade unter den noch nicht berechneten Formen F' vorkommen. Durch unsern

Satz von der Periodicität der Formenreihe wird diese Schwierigkeit gehoben. Wir haben jetzt nämlich F_1 nur mit der endlichen Anzahl r von Formen F' zu vergleichen. <u>Wir können also jetzt (d. h. im Falle der Formen mit ganzzahligen oder doch commensurablen Coefficienten) die Aequivalenzfrage durch eine von vornherein angebbare endliche Anzahl von Schritten entscheiden.</u>

Eine ganze Reihe anderer interessanter Folgerungen ergibt sich, wenn wir die Substitution aufsuchen, welche F_1 in F_{r+1}, d. h. in sich selbst überführt.

Zu jeder Form F gehörte ja ein reducirtes Coordinatensystem. Dabei entstand die Elementarfigur eines jeden aus der in der Reihe vorhergehenden Elementarfigur durch eine affine Transformation von der Determinante 1 (nämlich

y_1 y_{r+1} λ_1 X_{r+1} X_1 λ_2

durch eine Wiederholung der Substitutionen S oder S'). Es hängen also auch die Coordinatensysteme x_1, y_1 und x_{r+1}, y_{r+1}, welche zu F_1 bez. F_{r+1} gehören durch eine Substitution von derselben Beschaffenheit zusammen:

$$\Sigma \left| \begin{array}{l} x_1 = \alpha x_{r+1} + \beta y_{r+1} \\ y_1 = \gamma x_{r+1} + \delta y_{r+1} \end{array} \right. \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Diese Substitution führt F_1 in sich selbst über; wir bezeichnen sie als eine <u>Automorphie der Form.</u>

Alle Substitutionen, zu welchen wir beim Übergang von einer Elementarfigur unserer Reihe zu einer andern kommen, haben die Eigenschaft, nicht nur die Determinante 1 zu besitzen, sondern die positive x-Axe in demselben Sector zwischen den Linien Λ_1 und Λ_2 zu belassen. Wir wollen eine Substitution von dieser Eigenschaft vorübergehend eine <u>reguläre</u> nennen. Ein Beispiel einer nicht regulären Substitution liefert die folgende:

$$X_1 = -X_2, \quad Y_1 = -Y_2, \quad \text{oder auch} \quad X_1 = -Y_2, \quad Y_1 = +X_1$$

Wir bezeichnen daher genauer unsere Automorphie als eine <u>reguläre Automorphie.</u>

Gehen wir sodann von F_{r+1} zu F_{2r+1} weiter, so geschieht dieses gleichfalls durch eine affine Transformation von der Determinante 1. Es zeigt sich sofort, dass diese mit Σ identisch sein muss. Denn der Übergang von dem Coordinatensystem $(r+1)$ zu $(2r+1)$ setzt sich durch genau dieselbe Combination der Operationen S und S' zusammen, wie der Übergang von (1) zu $(r+1)$.

Wollen wir zu neuen regulären Automorphien kommen, so können wir also nichts anderes machen, als dass wir die Operation Σ wiederholen, d.h. von F_1 direct zu F_{2r+1}, F_{3r+1} etc. übergehen. Wir bilden uns also die Reihe der folgenden Substitutionen:

$$\ldots \Sigma^{-2}, \Sigma^{-1}, \Sigma^{0}, \Sigma, \Sigma^{2}, \ldots$$

Wir erhalten so eine unendliche Reihe

von Automorphien der Form F. Alle Substitutionen dieser Reihe sind von einander verschieden. In der That wird das Coordinatensystem (1), wie aus der Figur hervorgeht, durch alle diese Substitutionen in lauter verschiedene neue Lagen gebracht. Andrerseits gibt es auch keine anderen regulären Automorphien von F, als die hingeschriebenen. Denn es muss jede solche Substitution die Reihe der reducirten Formen in sich überführen, sie muss also eine derjenigen Coordinatentransformationen sein, welche die Elementarfigur (1) in eine der anderen reducirten Elementarfiguren verwandelt. Die obige Reihe enthält aber alle diejenigen Coordinatentransformationen dieser Art, bei welchen F, in sich übergeht.

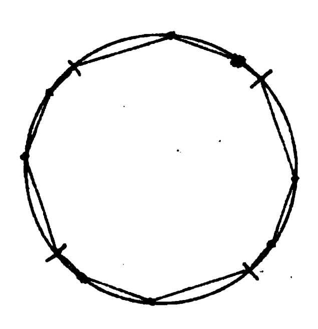
<u>Die Operation Σ mit ihren positiven und negativen Potenzen liefert uns also die sämmtlichen, unendlich vielen regulären Automorphien unserer Form.</u>

Man kann diesen Dingen noch eine interessantere Wendung geben, wenn man berücksichtigt, dass jede Substitution neuer Veränderlicher in der analytischen Geometrie auf doppelte Weise aufgefasst werden kann: entweder als Coordinatentransformation bei festgehaltener Figur, oder als Figurentransformation bei festgehaltenem Coordinatensystem. Bisher haben wir unsere Automorphie vom Standpunkte der Coordinatentransformation betrachtet. Denken wir uns jetzt das Coordinatensystem fest. Dann stellt die Substitution Σ eine affine Umformung der Ebene dar. Da ihre Coefficienten ganze Zahlen sind, so gehen dabei die Gitterpunkte wieder in Gitterpunkte über. Da ferner F_1 in sich übergeführt wird und da $F_1 = 0$ die Gleichung der Λ-Linien ist, so bleiben die Λ-Linien bei jener Umformung ungeändert. Da endlich Σ eine reguläre Substitution ist, so wer-

den auch die zwischen den Λ-Linien gelegenen Sectoren in sich übergeführt. Wir nannten aber eine solche affine Umformung, bei welcher die Λ-Linien fest bleiben und die Λ-Sectoren in sich verwandelt werden, eine Pseudodrehung. *Bei unserer zweiten Auffassung ist also die Operation Σ eine Pseudodrehung um O, welche das Punktgitter als Ganzes ungeändert lässt.* Auf Grund des Früheren können wir sagen: *es gibt unendlich viele solcher Pseudodrehungen; dieselben werden durch die positiven und negativen Potenzen von Σ erschöpft.*

Gleichzeitig mit den Λ-Linien und den Punktgittern werden auch die *Umrisspolygone* der letzteren durch unsere Pseudodrehungen mit sich zur Deckung gebracht. Dieselben besitzen also eine Regelmässigkeit (ähnlich) der der regulären Polygone in der Elementargeometrie. Während aber bei diesen jede Seite mit jeder anderen durch eine gewisse Drehung

und deren Wiederholungen zur Deckung gebracht wird, wird bei unseren Polygonen immer erst ein gewisser Complex von Seiten in einen anderen solchen Complex übergeführt.



Die nebenstehende Figur stellt das entsprechende Vorkommnis in der gewöhnlichen Maassbestimmung dar. Wir wollen ein solches Polygon als semiregulär bezeichnen. Von unseren Umrisspolygonen werden wir daher sagen können: sie sind pseudosemiregulär.

Hier entsteht vor Allem die Frage nach der (hyperbolisch gemessenen) Grösse des zur Substitution Σ gehörigen Drehungswinkels. Diese Frage werden wir unter anderen beantworten, indem wir im Folgenden als analytische Ergänzung zu dem Vorhergehenden die Theorie der

Pell'schen Gleichung entwickeln.

Wir gehen aus von der Form

$$f = ax^2 + bxy + cy^2$$

und suchen eine reguläre Substitution

$$x = \alpha x' + \beta y', \quad y = \gamma x' + \delta y' \quad \Big| \; \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

welche f in sich überführt. Die Rechnung wird ganz einfach, wenn wir Folgendes berücksichtigen: Die angeschriebene Substitution lässt den Nullpunkt und zwei Strahlen durch denselben ungeändert. Die Gleichung der letzteren ergibt sich, wenn wir $x' = \varrho x$, $y' = \varrho y$ setzen; sie lautet

$$\frac{x}{y} = \frac{\alpha x + \beta y}{\gamma x + \delta y} \text{ oder } \gamma x^2 + (\delta - \alpha) xy - \beta y^2 = 0.$$

Soll die Form f bei unserer Substitution in sich übergehen, so müssen diese beiden Strahlen mit den Ω-Linien ($f = 0$) zusammenfallen. Es müssen also die Coefficienten in den Gleichungen beider Geradenpaare proportional sein:

$\gamma = au$, $\delta - \alpha = bu$, $\beta = -cu$,
unter u eine ganze Zahl verstanden.
Setzen wir noch $\delta + \alpha = t$, so berechnet sich:

$$\alpha = \frac{t - bu}{2}, \quad \beta = -cu$$

$$\gamma = au, \quad \delta = \frac{t + bu}{2}.$$

Die Zahlen t und u sind nun nicht willkürlich; aus der Relation $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ folgt nämlich:

$$t^2 - Du^2 = 4.$$

Dies ist die berühmte <u>Pell'sche Gleichung.</u>

Jede ganzzahlige Lösung dieser Gleichung liefert uns eine Automorphie von f.

Frei. d. 13. XII. Wir erhalten übrigens durch die Pell'sche Gleichung ausser den regulären Automorphien auch diejenigen, bei denen die Ω-Sectoren vertauscht werden. Eine Lösung ist nämlich auch:

$$t = \pm 2, \quad u = 0;$$

zu dieser gehört die Substitution

$$\alpha = \pm 1 \quad \beta = 0 \qquad \text{oder} \qquad x = \pm x'$$
$$\gamma = 0 \quad \delta = \pm 1 \qquad\qquad\quad y = \pm y'$$

so dass für $t = -2$ $x = -x'$, $y = -y'$ entsteht. Setzen wir diese Substitution mit den sämmtlichen regulären zusammen, so ergeben sich die sämmtlichen nicht regulären Substitutionen von f in sich selbst.

Besonders einfach werden alle diese Transformationsgleichungen in Minimalcoordinaten. Wir spalten f in zwei Factoren

$$f = \xi\,\eta$$
$$\xi = m\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b+\sqrt{D}}{2}\,y\right)$$
$$\eta = \frac{1}{m}\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b-\sqrt{D}}{2}\,y\right),$$

wobei die Hinzufügung der Factoren $m, \frac{1}{m}$ nur eine Aenderung des Azimuthes bedeutet, unter welchem wir unser Gitter gegen das Coordinatensystem „orientiren". ξ, η sind die Minimalcoordinaten des Punktes x, y. Seien ferner ξ', η' Minimalcoordinaten desjenigen Punktes x', y', in welchen der Punkt x, y durch eine

Automorphie von f übergeführt wird, so daß

$$\xi' = m\left(\sqrt{a}\,x' + \frac{b+\sqrt{D}}{2}\,y'\right)$$

$$\eta' = \frac{1}{m}\left(\sqrt{a}\,x' + \frac{b-\sqrt{D}}{2}\,y'\right).$$

Tragen wir in die Ausdrücke für ξ und η die Werte von x und y aus den Substitutionsformeln der vorletzten Seite ein, so ergibt sich einfach:

$$\xi = \frac{t+\sqrt{D}\,u}{2}\,\xi',$$

$$\eta = \frac{t-\sqrt{D}\,u}{2}\,\eta'.$$

Die Minimalcoordinaten ξ, ξ' und η, η' zweier durch die Automorphie zugeordneter Gitterpunkte sind also untereinander proportional. Es ist dieses selbstverständlich, weil ja die Minimallinien $\xi = 0$, $\eta = 0$ bei der Automorphie nicht geändert werden.

Wir geben der Pell'schen Substitution noch eine etwas andere Form, indem wir statt $f = 0$ schreiben: $a\omega^2 + b\omega + c = a(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2) = 0$. Dann wird $\xi = n(\omega-\omega_1)$,

$\eta = n'(\omega - \omega_2)$ wo n und n' unbestimmt bleibende Factoren sind, also

$$\frac{\xi}{\eta} = \left(\frac{n}{n'}\right) \frac{\omega - \omega_1}{\omega - \omega_2}\ ;$$ ebenso haben wir

$$\frac{\xi'}{\eta'} = \left(\frac{n}{n'}\right) \cdot \frac{\omega' - \omega_1}{\omega' - \omega^2}\ .$$

Die Pell'sche Substitution kann daher folgendermassen geschrieben werden:

$$\frac{\omega - \omega_1}{\omega - \omega_2} = \frac{t + u\sqrt{D'}}{t - u\sqrt{D'}} \cdot \frac{\omega' - \omega_1}{\omega' - \omega_2}$$

oder mit Rücksicht auf die Pell'sche Gleichung:

$$\frac{\omega - \omega_1}{\omega - \omega_2} = \left(\frac{t + u\sqrt{D'}}{2}\right) \cdot \frac{\omega' - \omega_1}{\omega' - \omega_2}\ .$$

Die Proportionalitätsfactoren müssen, da $\xi\eta = \xi'\eta'$ ist, der Bedingung genügen, dass ihr Product gleich 1 ist. Hierdurch characterisirt sich unsere Automorphie als Pseudodrehung. In der That haben wir der Pell'schen Gleichung zufolge:

$$\frac{t^2 - D'u^2}{4} = 1\ .$$

Da nach dieser Gleichung $|t| > |\sqrt{D'}u|$, so hängt das Vorzeichen der Proportio-

nalitätsfactoren von dem Vorzeichen von t ab. Nehmen wir t als positive Zahl, so sind auch jene Factoren positiv, die Automorphie also eine reguläre.

Die Grösse des Drehungswinkels berechnet sich nach pg 75 aus den vorstehenden Substitutionsformeln zu

$$\frac{i}{2}\lg\frac{t+\sqrt{D}u}{t-\sqrt{D}u} = \frac{i}{2}\lg\frac{(t+\sqrt{D}u)^2}{4} = i\lg\left(\frac{t+\sqrt{D}u}{2}\right).$$

Wir combiniren jetzt diese Entwickelungen mit den früheren geometrischen Betrachtungen. Da folgt zunächst, dass die Pell'sche Gleichung sicher Lösungen hat, welche von der trivialen $t=\pm 2$, $u=0$ verschieden sind. Ferner aber sagen wir:

Da irgend zwei Automorphien nacheinander ausgeführt wieder zu einer Automorphie führen, so werden sich irgend zwei Lösungen t, u und t', u' der Pell'schen Gleichung wiederum zu einer Lösung dieser Gleichung zusammensetzen müssen. In der That, sei

$$\xi = \frac{t+u\sqrt{D}}{2} \qquad \xi'$$

die eine

$$\xi' = \frac{t' + u'\sqrt{D}}{2}\,\xi''$$

die zweite Automorphie. Dann folgt

$$\xi = \frac{t + u\sqrt{D}}{2}\,\frac{t' + u'\sqrt{D}}{2}\,.\,\xi'' = \frac{T + U\sqrt{D}}{2}\,\xi'',$$

$$T = \frac{tt' + uu'D}{2}, \quad U = \frac{tu' + ut'}{2}.$$

Um einzusehen, dass die Zahlen T und U ganze Zahlen sind, müssen wir hinsichtlich der Discriminante

$$D = b^2 - 4ac$$

zwei Fälle unterscheiden. Je nachdem b gerade oder ungerade, ist

entweder $D \equiv 0\ (4)$

oder $D \equiv 1\ (4)$;

aus der Pell'schen Gleichung folgt, im ersten Falle, dass t und t' gerade, im zweiten Falle, dass t und u (und ebenso t' und u') gleichzeitig gerade oder ungerade sind. Allemal werden daher T und U ganze Zahlen. Sie genügen überdiess der Pell'schen Gleichung, wie sofort zu sehen ist.

Beiläufig bemerken wir: Wir können

bei der Pell'schen Gleichung auch ganz von dem Zusammenhange mit den Automorphien absehen und die Grössen

$$\frac{t + u\sqrt{D}}{2} \quad \text{bez.} \quad \frac{t - u\sqrt{D}}{2}$$

als complexe Zahlen auffassen, wobei wir t und u durch die Relation verbunden denken: $t^2 - Du^2 = 4$. Das System dieser complexen Zahlen hat nach dem, was wir soeben sahen, die Eigenschaft, sich bei der Multiplication zu reproduciren, in dem Sinne, daß das Product zweier Zahlen $\frac{t + u\sqrt{D}}{2}$ und $\frac{t' + u'\sqrt{D}}{2}$ wieder eine Zahl $\frac{T + U\sqrt{D}}{2}$ des Systems wird.

Über diese Zahlen können wir ferner auf Grund unserer früheren Betrachtungen den folgenden merkwürdigen Satz aussprechen. Alle Zahlen dieses Systems ergeben sich aus einer einzelnen kleinsten Lösung t_0, u_0 der Pell'schen Gleichung, indem man $\frac{t_0 + u_0\sqrt{D}}{2}$ potenzirt.

Es entspricht nämlich jede Zahl $\frac{T + U\sqrt{D}}{2}$ einer unserer Automorphien. Nun konnten wir alle Automorphien mit

Hülfe einer kleinsten Automorphie Σ in der Form darstellen Σ^{μ}. Der Zusammensetzung zweier Automorphien entspricht die Multiplication der complexen Zahlen, der Wiederholung einer Automorphie also die Potenzirung der Zahlen. Ist daher $\frac{t_0 + u_0\sqrt{D}}{2}$ diejenige Zahl des Systems, welche zu Σ gehört, so gehört zu Σ^{μ} die Zahl

$$\frac{T + U\sqrt{D}}{2} = \left(\frac{t_0 + u_0\sqrt{D}}{2}\right)^{\mu}.$$

Der zur Substitution Σ gehörige Drehungswinkel, nach welchem wir oben fragten, berechnet sich aus der Lösung t_0, u_0 der Pell'schen Gleichung in folgender Weise

$$\phi_0 = i \lg \frac{t_0 + u_0\sqrt{D}}{2}$$

Wir nennen ϕ den Pell'schen Winkel.
Wir erweitern jetzt diese Betrachtungen noch nach anderer Seite.
Wir fassen nämlich alle reducirten Formen in's Auge, welche bei gegebenem Werte der Discriminante möglich sind. Diejenigen Formen, welche

aequivalent sind, bilden eine „<u>Klasse</u>" von Formen, und in den reducirten Formen haben wir „Repräsentanten" der einzelnen Klasse. Nun ist es sehr wohl möglich, dass die zu derselben Discriminante gehörigen reducirten Formen sich auf verschiedene Klassen verteilen. Da es aber nur eine endliche Anzahl reducirter Formen giebt, so kann man aus ihnen sicher nur eine endliche Anzahl zusammengehöriger aequivalenter Formenserien herstellen. <u>Es giebt daher bei gegebenem D nur eine endliche Anzahl unterschiedener Klassen.</u>

Diese verschiedenen Klassen stehen sich aber nicht fremd gegenüber; sie bilden einen zusammenhängenden Organismus. Es geht dieses schon daraus hervor, dass allen diesen Klassen die Pell'sche Gleichung gemeinsam ist. In der That hängt diese Gleichung ja nur von dem Werte von D, nicht von den Besonderheiten der Klasse ab. Wir

werden das später noch sehr viel weitergehend entwickeln.

Unter diesen Klassen giebt es eine ausgezeichnete, welche man <u>Hauptklasse</u> nennt. Die Hauptklasse muss etwas anders definirt werden, jenachdem der Fall $D' \equiv 0(4)$ oder $D' \equiv 1(4)$ vorliegt. Im ersten Falle ist die Hauptklasse diejenige, welche die Form enthält:

$$x'^2 - \frac{D'}{4} y^2 \quad \left\{ D' \equiv 0(4) \right\}$$

Im zweiten Falle diejenige, in welcher die Form

$$x'^2 + x'y + \frac{1-D'}{4} y^2 \left\{ D' \equiv 1(4) \right\}$$

vorkommt. Alle anderen Klassen der Discriminante D' werden als <u>Nebenklasse</u> bezeichnet.

Mit den soeben angeschriebenen Hauptformen hängt die Pell'sche Gleichung auf das Engste zusammen. Setzen wir nämlich im ersten Falle $t = 2x$, $u = y$, so lautet dieselbe:

$$x^2 - \frac{D'}{4} y^2 = 1 .$$

Im zweiten Falle setzen wir $t - u = 2x'$, $u = y$, dann geht die Pell'sche Gleichung über in

$$x'^2 + x'y + \frac{1-D}{4} y^2 = 1$$

Beidemale erhalten wir aus der Pell'schen Gleichung die gleich 1 gesetzte Hauptform. Die allgemeine Lösung der Pell'schen Gleichung kommt also darauf hinaus, durch die Hauptform die Zahl 1 in allgemeinster Weise darzustellen.

So haben wir nun ein reiches Material neuer Sätze und neuer Auffassungen und es kommt darauf an, jetzt zunächst dasselbe durch Zahlenbeispiele zu illustrieren. Dabei werden sich von selbst noch einige Bemerkungen ergeben, die auf die allgemeine Theorie Bezug haben.

Ausführliche numerische Tabellen sind von Cayley berechnet worden. (Vergl. Crelle Bd. 60 oder Ges. Werke Bd. 5 pg. 141 ff). Cayley berechnet zu allen Discriminanten $|D| < 100$ und für einige weitere die zugehörigen Klassen quadratischer Formen.

Ferner sind derartige Tabellen von Legendre mitgeteilt worden (Vergl. Zahlentheorie Bd. I). Wir verweisen ins Besondere auf die Tabelle X, welche die Theorie der Pell'schen Gleichung zum Gegenstande hat. Leider finden sich überall Unterschiede in der Bezeichnung, über die man sich vorab unterrichten muss, ehe man die Tabellen gebraucht.

Hier wollen wir $D = 40$ annehmen. Zunächst berechnen wir die zu dieser Discriminante gehörigen sämmtlichen reducirten Formen. Es handelt sich dabei um die Formen (A, B, C), für welche $AC < 0$ und $B^2 - 4AC = 40$ ist. Wir stellen die Formen mit positivem A voran; die Formen mit negativem A bekommen wir aus jenen, indem wir die Vorzeichen sämmtlicher Coefficienten umkehren.

Für B setzen wir nacheinander alle geraden Zahlen $|B| < \sqrt{40}$ und suchen die zugehörigen Lösungen der Diophantischen Gleichung $B^2 - 4AC = 40$,

für welche $\mathfrak{A}\mathfrak{C} < 0$, $\mathfrak{A} > 0$ ist. Es ergibt sich

$$\mathfrak{B} = 0 \begin{cases} 10, & 0, & -1 \\ 5, & 0, & -2 \\ 2, & 0, & -5 \\ 1, & 0, & -10 \end{cases}$$

$$\mathfrak{B} = \pm 2 \begin{cases} 9, & \pm 2, & -1 \\ 3, & \pm 2, & -3 \\ 1, & \pm 2, & -9 \end{cases}$$

$$\mathfrak{B} = \pm 4 \begin{cases} 6, & \pm 4, & -1 \\ 3, & \pm 4, & -2 \\ 2, & \pm 4, & -3 \\ 1, & \pm 4, & -6 \end{cases}$$

$$\mathfrak{B} = \pm 6 \begin{cases} 1, & \pm 6, & -1. \end{cases}$$

Hiernach gibt es 20 reducirte Formen mit positivem $\mathfrak{A}$, ebenso viele Formen existiren mit negativem $\mathfrak{A}$, so dass die Gesamtzahl der reducirten Formen in diesem Falle 40 beträgt und mit der Discriminante zufälliger Weise übereinstimmt.

Unter diesen Formen suchen wir uns die Hauptreducirten erster und zweiter Art aus, d. h. diejenigen Formen, für welche die Ungleichungen bestehen:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{A} + \mathfrak{B}' + \mathfrak{C} < 0 \\ \mathfrak{A} + \mathfrak{B}' + \mathfrak{C} > 0 \end{array}\right\}$$

bez.

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{A} + \mathfrak{B}' + \mathfrak{C} > 0 \\ \mathfrak{A} + \mathfrak{B}' + \mathfrak{C} < 0 \end{array}\right\}$$

Es erweisen sich als Hauptreducirte 1. Art die folgenden 4 Formen:

3, − 2, − 3
3, − 4, − 2
2, − 4, − 3
1, − 6, − 1

Ebenso gross ist die Anzahl der Hauptreducirten 2 Art. Sie entstehen offenbar aus denen der ersten Art dadurch, dass wir $\mathfrak{B}$ im Vorzeichen umkehren. Demnach sind Hauptreducirte der 2ten Art die folgenden 4 Formen:

3, + 2, − 3
3, + 4, − 2
2, + 4, − 3
1, + 6, − 1.

Die übrigen 32 Formen sind Nebenreducirte. In's Besondere gehört die Hauptform (1, 0, − 10), sowie alle Formen mit $B = 0$ zu den Nebenreducirten. Von den Nebenreducirten werden wir nur beiläufig sprechen.

Wir stellen nun die zusammengehörigen Serien der hauptreducirten Formen auf, indem wir von irgend einer Hauptreducirten 1ten Art ausgehen. Sei die Ausgangsform

$$F_1 = 3x^2 - 2xy - 3y^2.$$

Auf diese Form üben wir die Operation

$$S \begin{cases} x = x' + y' \\ y = y' \end{cases}$$

so oft aus, bis eine Hauptreducirte der 2ten Art entsteht. Es ergibt sich schon beim ersten Male

$$F_2 = 3x^2 + 4xy - 2y^2.$$

An dieser Form operiren wir mit

$$S' \begin{cases} x = x' \\ y = x' + y' \end{cases}$$

Dabei entsteht zuerst die Nebenreducirte $5x^2 - 2y^2$; bei nochmaliger Anwendung von S' aber ergibt sich:

$$F_3 = 3x^2 - 4xy - 2y^2.$$

Jetzt wenden wir wieder S an und bekommen die Hauptreducirte

$$F_4 = 3x^2 + 2xy - 3y^2.$$

Hieraus entsteht durch die Operation S'

$$F_5 = 2x^2 - 4xy - 3y^2,$$

sodann durch S^2

$$F_6 = 2x^2 + 4xy - 3y^2.$$

Operiren wir an F_6 wiederum mit S', so erhalten wir schliesslich

$$F_7 = 3x^2 - 2xy - 3y^2 = F_1.$$

In unserm Beispiele treten also 3 Hauptreducirte der 1ten Art (und ebenso viele der 2ten Art) zu einer ersten Formenserie zusammen. Wir wollen uns die Aufeinanderfolge der Formen

schematisch durch Punkte einer geschlossen Curve versinnlichen. Wir erhalten dann in unserem Falle das nebenstehende Bild.

3, 2, −3
2, 4, −3
3, 4, −2
2, −4, −3
3, −4, −2
3, 2, −3

Zu unserer Formenserie gehört eine kleinste Substitution, welche diese Serie in sich transformirt. Diese Substitution können wir, wenn wir von F_1 ausgehen, nach dem Vorstehenden symbolisch schreiben:

$$(x, y) = S S'^{2} S S' S^{2} S' (x', y');$$

ausgerechnet lautet dieselbe

$$x = 25 x^{VI} + 18 y^{VI},$$

$$y = 18 x^{VI} + 13 y^{VI}.$$

Dieser kleinsten Substitution entspricht eine kleinste Lösung der Pell'schen Gleichung:

$$t^2 - 40 u^2 = 4.$$

Dieselbe berechnet sich nach pg. 141 aus den Coefficienten unserer Substitution und der Ausgangsform zu

$$t = 38, \quad u = 6.$$

Alle anderen Lösungen der Pell'schen Gleichung müssen sich aus dieser Lösung durch Potenziren ableiten lassen. Der Pell'sche Winkel wird $i \log(19 + 6\sqrt{10})$.
Von den 8 Hauptreducirten Formen der Discriminante + 40 bleiben nur 2 Formen übrig, welche nicht in unserer ersten Formenserie enthalten sind. Dieselbe müssen sich zu einer 2ten Serie zusammenschliessen. Wir gehen bei der Berechnung dieser 2ten Serie von der Hauptreducirten erster Art

$$F_1 = x^2 - 6xy - y^2$$

aus. An dieser Form operiren wir mit $S\,\Gamma^{\mu}$, wobei wir $\mu = 1, 2 \ldots$ wählen werden, bis wir wieder auf eine Hauptreducirte kommen. Nehmen wir $\mu = 3$, so entsteht die Hauptform $x^2 - 10y^2$, welche eine Neben-

reducirte ist. Erst für $\mu = 6$ ergibt sich wieder eine Hauptreducirte u. zw. die noch restirende Form:

$$F_2 = x^2 + 6xy - y^2,$$

wie es sein muss. Üben wir auf diese successive die Operationen S'^{μ} aus, so kommen wir für $\mu = 6$ wieder auf F zurück. Unsere zweite Formenserie besteht also nur aus 2 Hauptreducirten; übrigens enthält sie dafür um so mehr Nebenreducirte, nämlich 10. Wollen wir uns auch diese Serie schematisch auf einem geschlossenen Curvenzuge veranschaulichen, so kommen wir zu der nebenstehenden Figur.

Wir haben nunmehr die sämmtlichen 20 reducirten Formen mit positivem A auf 2 Klassen untergebracht. Zu den Formen mit negativem A konnten wir durch unser bisheriges Verfahren

nicht gelangen, weil wir nur die „regulären" Substitutionen S und S' angewandt haben, welche die A-Sectoren einzeln in sich transformiren. Um zu erkennen, ob sich die Formen mit negativem A in dieselben Klassen einordnen, müssen wir diejenigen Substitutionen von der Determinante 1 hinzunehmen, welche die A-Sectoren vertauschen. Eine einfachste solche Substitutionen ist die uns von früher bekannte Operation:

$$T \begin{cases} x = -y' \\ y = x' \end{cases}.$$

Wenden wir diese auf eine reducirte Form $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ mit negativem A (und folglich mit positivem C) an, so entsteht eine Form $Cx'^2 - Bx'y' + Ay'^2$ mit positivem ersten Coefficienten. Die Formen mit negativem ersten Coefficienten sind also je mit einer Form aequivalent, deren erster Coefficient positiv ist. Diese Formen ordnen sich also alle

gemein in die Classen der Formen mit positivem A, in unserem Falle somit in die beiden vorher gefundenen Klassen ein. <u>Es gibt bei der Discriminante 40 nur zwei verschiedene Klassen quadratischer Formen.</u>

Bei dieser Gelegenheit bringen wir noch einige Détails zur Sprache. Man bezeichnet die Form $(-A, -B', -C)$ als die zu einer gegeben Form (A, B', C) <u>entgegengesetzte Form</u> (forma opposita).

Wir fragen uns, wann eine Form mit ihrer entgegengesetzten aequivalent ist.

Zunächst können wir mittelst der Substitution S die Form $(-A, -B', -C)$ umsetzen in die aequivalente Form $(-C, B', -A)$. Ist (A, B', C) eine reducirte Form mit positivem ersten Coefficienten, so ist auch $(-C, B', -A)$ eine ebensolche. Daraus folgt: <u>Soll eine reducirte Form (A, B', C) mit ihrer entgegengesetzten $(-A, -B', -C)$ aequivalent sein, so muss $(-C, B', -A)$</u>

in derselben Formenserie enthalten sein, wie (A, B, C) selbst.

Bei der Discriminante $D = 40$ ist dieses wirklich der Fall. Wir deuten dieses in den Figuren durch die horizontalen Geraden an, welche je eine Form $(-C, B, A)$ mit einer Form (A, B, C) verbinden. Im Allgemeinen trifft dieses jedoch keineswegs immer zu, wie die Cayley'schen Tabellen zeigen.

Man bezeichnet ferner eine Form, welche mit sich selbst uneigentlich aequivalent ist, d.h. bei einer affinen Transformation von der Determinante -1 ungeändert bleibt, als Anceps-Form (nach Gauss) oder als ambige Form (nach Kummer). Die Formenklasse, in welcher eine Anceps-Form enthalten ist, heisst auch eine Anceps-Klasse. Um zu entscheiden, wann eine Klasse ambig ist, transformiren wir eine reducirte Form (A, B, C) der Klasse mittelst der Substitution

$$x = x'$$
$$y = -y',$$

welche von der Determinante − 1 ist, in die gleichfalls reducirte Form $(A, -B, C)$. Diese Form muss mit der gegebenen eigentlich aequivalent sein, wenn die gegebene Form mit sich selbst uneigentlich aequivalent ist. Daraus folgt: <u>Wenn unsere Klasse eine Anceps„ Klasse sein soll, so muss die Form $(A, -B, C)$ in derselben Formenserie vorkommen, wie (A, B, C).</u>

Die Betrachtung der Figuren von pg. 157 und 159 zeigt, daß im Falle $D = 40$ beide vorhandenen Klassen Anceps-Klassen sind. Wir deuten dieses durch die Verticalen Geraden an, welche je von einer Form (A, B, C) zu einer Form $(A, -B, C)$ hinführen. Im allgemeinen Falle trifft dieses natürlich nicht zu.

Frei. d. 21. XII. Der Theorie der indefiniten quadratischen Formen haben wir als Ergänzung heute noch einige Bemerkungen über die arithmetischen Kriterien hinzuzufügen, durch welche wir entscheiden können,

ob ein Gitterpunkt zu einem der natürlichen Umrisspolygone gehört. Dazu ist offenbar zunächst erforderlich, dass die Coordinaten des Gitterpunktes x und y keinen gemeinsamen Teiler haben. Als weitere Bedingung teilen wir ohne Beweis die folgende mit: Es wird in den Ecken der Umrisspolygone

$$f(x, y) \leqq D/4.$$

Man kann den Minimalwert von f noch genauer abschätzen. Es zeigt sich nämlich, dass f mindestens in einer Ecke der Umrisspolygone einen Wert

$$\leqq \sqrt{\frac{D}{5}}$$

annimmt. Wegen des Beweises vergleiche man eine interessante Arbeit von Markoff in Math. Annalen Bd. 15 (1879). Es wird interessant sein, die Entwickelungen von Markoff durchweg in das Geometrische zu übersetzen. Übrigens hängen diese Betrachtungen mit unseren früheren Entwickelungen betreffend das Minimum der Linearformen zusammen,

durch welche wir den Lagrange'schen Satz über Kettenbrüche (vergl. pg. 39) bewiesen.

4. Die Reductionstheorie im ellipstischen Falle.

Wir hätten jetzt die entsprechende Theorie wie für die indefiniten auch für die definiten Formen zu entwickeln. Um aber vor Weihnachten zu einem guten Abschluss zu kommen, sei es gestattet, hierbei nur die Resultate anzugeben. Sie finden übrigens alles Wesentliche über definite Formen auch in der Litteratur vor.

Sei $f = ax^2 + bxy + cy^2$ eine definite Form, für welche also $D = b^2 - 4ac < 0$ ist. Wir setzen $D = -\Delta$, so dass Δ positiv ist. Die Coefficienten a und c haben notwendiger Weise dasselbe Vorzeichen; wir wollen der Bestimmtheit wegen annehmen, dass beide positiv und, dass wir es also mit einer positiven Form f zu thun

haben. Wir bringen unsere Bemerkungen unter eine Reihe von Punkten.

<u>1. Die geometrische Deutung im Gitter</u> wird, wie wir schon früher sahen, bei den definiten Formen besonders einfach. Man reicht dabei nämlich mit der gewöhnlichen Maassbestimmung aus. Das Fundamentalparallelogramm des zur Form f gehörigen Gitters hat die Seitenlängen $\sqrt{a}$, $\sqrt{c}$ und einen eingeschlossenen Winkel χ von der Grösse $\cos\chi = \frac{-b}{2\sqrt{ac}}$. Die Gittertheorie der definiten Formen ist bereits von <u>Dirichlet</u> viel benutzt worden und ausserordentlich klar in Crelle Bd. 40 auseinandergesetzt worden. Nur bei der Redaction seiner Vorlesungen ist sie leider fortgelassen worden.

2. Das Gitter, welches wir zu der Form f hinzuconstruiren, ist zunächst ein <u>Parallelengitter</u>. Denken wir uns aber die Gitterstäbe weg und achten nur noch auf die Gitterpunkte, so bekommen wir ein <u>Punktgitter</u>. Das Punktgitter ist nicht für die einzelne Form f, sondern für die ganze Klasse der mit f aequivalenten For-

men characteristisch.

3. Aus der Formenklasse heben wir eine besonders einfache Form heraus, die wir reducirte Form nennen. Dieselbe wird folgendermassen definirt. Wir suchen unter allen Gitterpunkten denjenigen auf, welcher von 0 die kleinste Entfernung hat. Die Richtung von 0 nach diesem Punkte wählen wir zur x-Axe, seine Entfernung von 0 liefert die erste Parallelogrammseite $\sqrt{\mathfrak{A}}$.

Unter allen nicht auf der x-Axe gelegenen Gitterpunkten suchen wir sodann denjenigen mit der nächstkleinsten Entfernung von 0 heraus. Die Lage dieses Punktes liefert die y-Axe, seine Entfernung von 0 die Parallelogrammseite $\sqrt{\mathfrak{C}}$. Die auf dieses Coordinatensystem transformirte gegebene Form nennen wir die zu f gehörige reducirte Form; sie laute

$$\mathfrak{A}x^2 + \mathfrak{B}xy + \mathfrak{C}y^2.$$

Bei der Bestimmung des reducirten Coordinatensystems können wir sowohl den x- wie den y-Vector ebenso gut

nach der einen wie nach der anderen Seite von 0 aus ziehen, weil zu jedem Punkte im Gitter auch der diametrale Punkt vorhanden ist. Abgesehen von dieser Unbestimmtheit gibt es im Allgemeinen nur ein Coordinatensystem, welches die geforderten Eigenschaften hat und also auch nur eine reducirte Form. Bei besonderen Symmetrieverhältnissen des Gitters kann jedoch unsere Construction auch zwei- und dreideutig werden; dann gibt es zwei oder drei reducirte Formen in derselben Klasse.

5. Das arithmetische Kennzeichen einer reducirten Form sind die folgenden Ungleichungen:

$$|\mathfrak{B}| \leqq \mathfrak{A} \leqq \mathfrak{C}.$$

Speciell ergibt sich für den ersten Coefficienten $\mathfrak{A}$ einer reducirten Form die Beziehung

$$\mathfrak{A} \leqq \sqrt{\frac{\Delta}{3}}.$$

6. Die Herstellung der reducirten Form $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ aus einer gegebenen Form (a, b, c) erfolgt auch hier durch alternirende

Benutzung der Operationen S und S'.. Man transformirt nämlich (a, b, c) abwechselnd mittelst $S^{\prime \mu}$ und $S^{\prime\nu}$ wobei man allemal μ und ν so wählt, dass der mittelste Coefficient der transformirten Form so klein wie möglich wird. So kommt man schliesslich durch eine endliche Anzahl von Schritten zu einem absolut kleinsten Werte B und zu der zugehörigen reducirten Form.

7. Dieser Process hängt wieder enge mit der Kettenbruchentwickelung für die Wurzeln von f, die Grössen

$$\left.\begin{matrix}\omega_1\\ \omega_2\end{matrix}\right\} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2}$$

zusammen.

Soviel über die allgemeine Theorie der definiten Formen bei beliebigen a, b, c. Bei ganzzahligen (oder commensurabeln) Coefficienten finden die folgenden besonderen Verhältnisse statt.

1. Bei gegebenem D gibt es nur eine endliche Anzahl von Klassen. Es gibt

nämlich wegen der Begrenzungen, denen die Coefficienten der reducirten Formen unterworfen sind, nur eine endliche Anzahl von solchen Formen. Wir erwähnten bereits, dass A kleiner als $\sqrt{\frac{\Delta}{3}}$ wird. Es gibt also nur eine endliche Anzahl ganzzahliger Werte von A.

Ferner ist B kleiner als A und C durch A, B und Δ mitbestimmt.

Die Anzahl der zu gegebener Discriminante $\Delta < 100$ gehöriger Klassen kann man ins Besondere aus den obencitirten Cayley'schen Tabellen entnehmen.

2. Man wird auch hier nach den Automorphieen fragen. Was die eigentlichen Automorphien (welche die Determinante +1 haben) betrifft, so ergeben sich diese wieder aus der Pell'schen Gleichung. Dieselbe lautet jetzt:

$$t^2 + \Delta u^2 = 4.$$

Ihre Theorie wird ungemein einfach. Ist nämlich $\Delta > 4$ so gibt es nur die eine triviale Lösung $t = \pm 2$,

$u = 0$. Ausserdem existiren im Falle $\Delta = 3$ und $\Delta = 4$, wo die reducirten Formen

$$x^2 + xy + y^2$$

bez. $x^2 + y^2$

lauten werden, noch einige wenige nicht trivialen Lösungen. Am deutlichsten werden diese Verhältnisse, wenn man an den Pell'schen Winkel Φ denkt, welcher jetzt einen gewöhnlichen Winkel bedeutet. Die Automorphie ist dann eine gewöhnliche Drehung des Gitters um 0 durch diesen Winkel, bei welcher das Gitter in sich übergeht. Der Lösung $t = -2, u = 0$ entspricht der Winkel $\Phi = \pi$. Im Allgemeinen geht das Gitter nur bei einer Drehung um π (oder 2π) in sich über, was ja selbstverständlich ist. Für die besonderen Werte $\Delta = 3$ oder $\Delta = 4$ dagegen hat der Pell'sche Winkel die Grösse $\pi/3$ oder $\pi/4$. Das Gitter ist dann ein gleichseitiges oder ein quadratisches Gitter, welche ihrer besonderen Symmetrie wegen

bereits bei einer Drehung um $\pi/3$ oder $\pi/4$ mit sich zur Deckung kommen.

3. Auch die uneigentlichen Automorphien (von der Determinante -1) lassen sich mit einem Worte erledigen. Das Vorhandensein einer uneigentlichen Automorphie bedeutet, daß das Gitter mit sich invers congruent ist, also durch Spiegelung in sich übergeht. Dies findet nur statt bei den <u>rechteckigen</u> und den <u>rhombischen Gittern.</u> Benutzen wir unsere obige Bezeichnung von pg. 162, so können wir sagen: Die einzigen Ancepsklassen, welche in der Theorie der definiten Formen möglich sind, sind diejenigen mit einem rechteckigen oder rhombischen Punktgitter.

II. Hauptteil:

Die Reductionstheorie in ihrer Wirkung auf die Gesammtheit der binären quadratischen Formen.

Do. d. 10. I. 95. Nachdem wir im ersten Hauptteile die einzelne quadratische Form untersucht und in's Besondere ihre Reduction durchgeführt haben, soll es sich jetzt darum handeln, die Gesammtheit der zu gegebenem D gehörigen quadratischen Formen zu überblicken und die Stellung der reducirten Formen innerhalb dieser Gesammtheit zu characterisiren.

1. Allgemeiner Ansatz.

Wir recapituliren kurz die Definition der reducirten Formen. Dieselbe fiel verschieden aus, je nachdem $D < 0$ oder $D > 0$ war. Bei negativem D wurde eine Form (a, b, c) reducirt genannt,

wenn

$$|b| \leqq a \leqq c$$

war; die Coefficienten a und c wurden dabei als positiv vorausgesetzt, indem es genügte, von den positiven definiten Formen zu sprechen. Durch die vorstehenden Ungleichungen war die reducirte Form in eindeutiger Weise festgelegt, wenn wir von gewissen Ausnahmewerten von D absahen, die wir bald noch eingehender untersuchen werden.

Ist dagegen $D > 0$, so sollte eine Form (a, b, c) reducirt heissen, wenn

$$a\,c < 0.$$

Hier gab es im Allgemeinen zu einer vorgelegten Form unendlich viele reducirte Formen, die sich nur für commensurable a, b, c auf eine endliche Zahl reducirten.

Für den Zweck, den wir nunmehr verfolgen: den Zusammenhang der verschiedenen quadratischen Formen zu überblicken: ist die Darstellung der Formen im Gitter nicht mehr

bequem, denn es ist nicht leicht, die gegenseitige Lage von unendlich vielen Gittern zu erfassen. Wir wählen jetzt eine ganz andere Art von geometrischer Repräsentation. Wir deuten nämlich einfach die Coefficienten a, b, c, der Form als gewöhnliche rechtwinklige Coordinaten im R_3, d. h. als Coordinaten eines Punktes.

Wir construiren uns zunächst die Fläche $b^2 - 4ac = 0$, welche einen Kegel darstellt. Ferner markiren wir den Ort der Punkte, für welche $b^2 - 4ac = D$ ist. Wir erhalten so, indem wir D verschiedene Werte erteilen, eine Schaar von Hyperboloiden, welche alle den genannten Kegel zum Asymptotenkegel haben. Je eines dieser Hyperboloide stellt die sämmtlichen Formen von gleichem D dar. Die Hyperboloide sind zum Teil einschalige, zum Teil zweischalige. Die einschaligen Hyperboloide liegen im Äusseren des Asymptotenkegels. Dieselben gehören zu positiven Werten

von D^c, repräsentiren also die indefiniten Formen. Die zweischaligen Hyperboloide liegen im Innern des Kegels. Die eine Schale senkt sich in die eine, die andere Schale in die zweite Öffnung des Kegels vom Unendlichen herein. Diese Hyperboloide gehören zu negativem D^c u. zw. stellt die eine Schale die definiten positiven, die andere die definiten negativen Formen der Discriminante D^c dar.

Bei dem Studium des Aequivalenzproblemes kommt es auf die Substitutionen $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ in den x, y an. Dieselben schreiben sich, als Substitutionen der nunmehrigen Variabeln a, b, c aufgefasst, folgendermassen:

$$a' = a\alpha^2 + b\,\alpha\gamma + c\gamma^2,$$
$$b' = 2a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2c\gamma\delta,$$
$$c' = a\beta^2 + b\beta\delta + c\delta^2.$$

Sie bilden in ihrer Gesammtheit eine <u>discontinuirliche Gruppe affiner Umformungen des Raumes</u>, bei welchen (da die Discriminante durch die Substi-

tution $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ nicht geändert wird) unsere sämmtlichen Hyperboloide u. in's Besondere unser Kegel in sich übergehen. Dies wäre das vollständige geometrische Gegenbild der zu betrachtenden arithmetischen Verhältnisse. Wir werden von diesem Bilde jedoch keinen Gebrauch machen, sondern wählen ein unvollständiges schlechteres Bild u. zw. lediglich aus dem Grunde, weil die Vorstellung und namentlich weil die Zeichnung der räumlichen Dinge zu schwierig ist.

Wir werden nämlich in der Folge nur auf die Verhältnisse der a, b, c achten und die Grössen $a : b : c$ als Dreieckscoordinaten in der Ebene, sagen wir kurz: <u>als Punkt im R_2</u> deuten.

Unsere obigen Transformationsformeln lauten jetzt, da doch nur die Verhältnisse der a, b, c eine geometrische Bedeutung haben sollen:

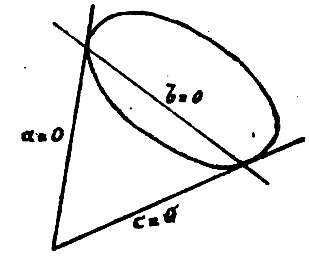
$$\rho a' = a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2$$
$$\rho b' = 2a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2c\gamma\delta$$
$$\rho c' = a\beta^2 + b\beta\delta + c\delta^2.$$

Diese Transformationen stellen jetzt in ihrer Gesammtheit eine <u>Gruppe von projectiven Umformungen der Ebene</u> $a : b : c$ dar. In der Ebene markiren wir uns den Kegelschnitt $b^2 - 4ac = 0$; derselbe bleibt bei den projectiven Transformationen unserer Gruppe ungeändert. Von dem absoluten Werte der Discriminante $b^2 - 4ac$ kann natürlich keine Rede mehr sein.

Wir kommen so von der affinen Geometrie im R_3 zu der projectiven im R_2. Unsere neue Deutung ist dabei im Grunde nichts anderes, als eine Projection des vorigen räumlichen Bildes, nämlich die Projection vom Coordinatenanfangspunkt des R_3 aus auf eine irgendwie gestellte Bildebene. Ein ähnliches Verhältnis findet ganz allgemein statt. Man kommt von einer gewöhnlichen Coordinatenbestimmung im R_{n+1} zu einer projecti-

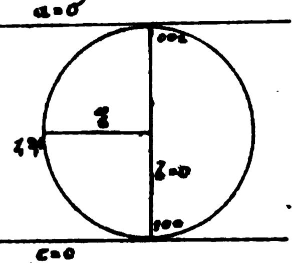
ven im R_n, indem man jenen auf diesen projiciert.

In unserem Falle hat das Coordinatensystem eine charakteristische Lage gegen den Fundamentalen Kegelschnitt $b^2 - 4ac = 0$. Es sind nämlich die 2 Seiten $a = 0$, $c = 0$ des Coordinatendreiecks Tangenten an den Kegelschnitt, während die dritte $b = 0$. die Berührungssehne jener Tangenten ist. Wir haben den Kegelschnitt nebenstehend als Ellipse gezeichnet. Das ist natürlich völlig willkürlich; denn in der projectiven Geometrie gibt es keinen Unterschied zwischen Ellipse, Hyperbel und Parabel; oder was dasselbe besagt, bei Benutzung projectiver Coordinaten stellt die Gleichung $b^2 - 4ac = 0$ bei geeigneter Wahl des Coordinatensystems jeden beliebigen Kegelschnitt dar.



Wir werden die in der Lage des Coordinatensystems zur Verfügung stehende

Willkür dazu benutzen, unsere Figur besonders einfach zu gestalten. Wir wollen zwei Seiten des Coordinatendreiecks ($a=0$ und $c=0$) parallel und im Abstande 2 zu einander legen und die dritte ($b=0$) rechtwinklich zu ihnen annehmen. Dem alsdann noch völlig willkürlichen Einheitspunkte geben wir den Abstand $1, \frac{1}{2}, 1$ bez. von $a=0$, $b=0$, $c=0$. Unser Kegelschnitt geht durch den Punkt $a:b:c = 1:2:1$ hindurch, zufolge unserer Verfügung über den Einheitspunkt ist dieses ein Punkt, welcher von den drei Coordinatenaxen je den Abstand $\underline{1}$ besitzt. Ausserdem muss der Kegelschnitt die Linien $a=0$ und $c=0$ in Punkte $0,0,1$ bez. $1,0,0$ berühren. Durch diese Bedingungen ist der Kegelschnitt eindeutig bestimmt. Nun genügt aber der in der Figur verzeichnete Kreis vom Radius 1 je-



nen Bedingungen. Mithin wird vermöge unserer besonderen Annahme des Coordinatensystems der fundamentale Kegelschnitt zum Einheitskreise.

Im Übrigen ist diese Specialisirung des Coordinatensystems ganz unwesentlich und geschieht lediglich aus Bequemlichkeitsrücksichten. Es kann als gute Übung in der projectiven Geometrie empfohlen werden, die folgenden Constructionen bei einer beliebigen Hyperbel durchzuführen.

Wir wollen die Punkte des Kreises durch einen Parameter individualisiren. Zu dem Zweck schreiben wir die Gleichung des Kreises in die Form:

$$\frac{b}{2a} = \frac{2c}{b} = -\omega$$

oder

$$2a : -b : 2c = 1 : \omega : \omega^2,$$

womit die Parameterdarstellung des Kreises geleistet ist.

Wir legen ferner die Tangente an den Kreis im Punkte a', b', c'. Ihre Gleichung ist

$$bb' - 2ac' - 2a'c = 0,$$

wo a, b, c die laufenden Coordinaten eines Tangentenpunktes sind. Bedeutet ω den zum Berührungspunkte gehörigen Parameter, so können wir die Gleichung der Tangente auch schreiben:

$$a\omega^2 + b\omega + c = 0.$$

Hieraus berechnet man

$$\omega = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

als Parameter derjenigen beiden Punkte des Kreises, nach welchen vom Punkte a, b, c aus Tangenten verlaufen. Daran schliessen sich zwei Bemerkungen an: 1.) Im Innern des Kreises muss $b^2 - 4ac$ negativ, im Äusseren positiv sein, denn die von einem innern bez. äusseren Punkte auslaufenden Tangenten sind imaginär bez. reell. Für die quadratischen Formen bedeutet dieses Folgendes: Die definiten Formen finden im Innern des Kreises, die indefiniten ausserhalb desselben ihre Interpretation. 2.) Setzen

wir $\omega = \frac{x}{y}$, so geht die Gleichung der Tangente über in

$$a x^2 + b x y + c y^2 = 0.$$

Daraus folgt: die beiden Wurzeln von $\frac{x}{y}$, welche wir durch Nullsetzen der quadratischen Form erhalten, sind die Parameter ω derjenigen beiden Kreispunkte, in denen die vom Punkte a, b, c ausgehenden Tangenten den Kreis berühren. Hieraus folgt, dass ω bei der auf pg. 178 gegebenen Collineation einerseits die lineare Substitution $\omega = \frac{\alpha \omega' + \beta}{\gamma \omega' + \delta}$ erfährt; Collineation und Substitution sind wechselseitig eindeutig aneinander gebunden.

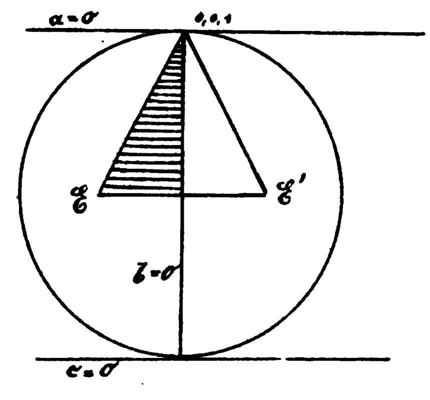
2. Die definiten quadratischen Formen und die Punkte im Innern des Kegelschnittes.

Wir wenden uns nun speciell zu den definiten Formen, studiren also das Innere des Kreises. Hier grenzen

wir uns zunächst den Raum für die reducirten Formen ab. Nehmen wir in den die reducirten Formen definirenden Bedingungen

$$|b| \leqq a \leqq c$$

die Gleichheitszeichen, so erhalten wir die Begrenzung des gesuchten Raumes. Dieselbe wird gebildet von den Geraden $b = a$, $b = -a$ und $a = c$. Die Gerade $b = a$ ist die Verbindungslinie des Punktes 0, 0, 1 mit dem Einheitspunkte $\mathfrak{E}$; ferner ist $b = -a$ die Verbindungslinie des Punktes 0, 0, 1 mit dem in Bezug auf $b = 0$ zu dem Punkte $\mathfrak{E}$ symmetrisch gelegenen Punkte $\mathfrak{E}'$.



Endlich ist $a = c$ die Gerade $\mathfrak{E}\mathfrak{E}'$. Das von diesen drei Geraden eingeschlossene Dreieck bildet den „reducirten Raum" für die definiten Formen. Dies Dreieck wird

noch durch die Gerade b-0 in zwei Teildreiecke zerlegt, von denen wir das eine schraffirt, das andere nicht schraffirt haben, wir nennen das einzelne dieser beiden Dreiecke ein „Fundamentaldreieck"

Nun gibt es, wie wir wissen, zu jeder definiten quadratischen Form eine und im Allgemeinen auch nur eine reducirte Form, welche mit ihr aequivalent ist. Mit anderen Worten: Es ist möglich einen jeden Punkt des Kreisinnern durch eine der $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ Collineationen in einen und im Allgemeinen auch nur in einen Punkt des reducirten Raumes hineinzubringen. Wenden wir umgekehrt alle die unendlich vielen Collineationen $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ auf den reducirten Raum an, so erhalten wir <u>eine unendliche Anzahl von weiteren Dreiecken. Dieselben müssen nach dem eben Gesagten das Innere des Kreises lückenlos und einfach überdecken.</u>

Frei. d. 10. I. Die so entstehende Figur

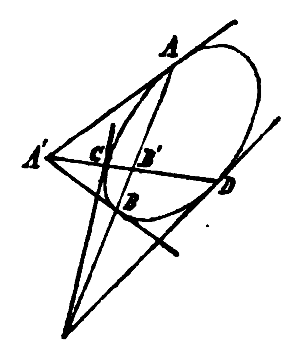
hat in der vorliegenden Theorie und im Anschlusse daran z. B. auch in der Theorie der elliptischen Modulfunctionen eine fundamentale Bedeutung. Um die Figur vollständig zu entwickeln, lösen wir erst eine etwas andere Aufgabe, nämlich wir construiren auf der Peripherie des Kreises eine Scala der in dem Parameter ω rationalen Punkte. Dabei gehen wir von den drei Punkten $\omega = 0, \infty, 1$ aus. In unserer Kreisfigur sind dieses bez. die Punkte mit den homogenen Coordinaten $0, 0, 1$; $1, 0, 0$; $1, -2, 1$, d. h. drei Punkte in sehr spezieller Lage. Wir können aber ebensogut von drei beliebigen Punkten auf einem beliebigen Kegelschnitt ausgehen, diesen Punkten die Parameter $0, \infty, 1$ beilegen, und nach denjenigen Punkten fragen, welche in Bezug auf sie rational sind. In der That brauchen wir nur zwei der gegebenen Punkte herauszugreifen und in diesen die Tangenten an den gegebenen Kegelschnitt zu legen. Dann liefern uns diese Tangenten zusammen mit der Berührungssehne

ein Coordinatendreieck, in Bezug auf welches der Kegelschnitt die Gleichung $b^2 - 4ac = 0$ annimmt. Bestimmen wir jetzt den Parameter ω so, wie es oben geschehen, so erhalten die zwei auf dem Kegelschnitt gelegenen Ecken des Coordinatendreiecks die Parameter $\omega = 0$ und $\omega = \infty$. Durch passende Wahl des Einheitspunktes können wir dann noch erreichen, daß der dritte der gegebenen Punkte den Parameter $\omega = 1$ erhält. Indem wir in solcher Weise von einem allgemeinen Kegelschnitt und drei beliebigen Punkten A, B, C auf ihm ausgehen, haben wir den Vorteil, dass die projective Bedeutung der jetzt zu beschreibenden Constructionen klarer wird, wie wenn wir an unserer speciellen Figur operiren würden.

Bei allen Constructionen der projectiven Geometrie ist der fundamentale Process dieser: <u>zu 3 gegebenen Elementen A, B, C das 4te harmonische D zu construiren</u>. Sind

die Elemente A, B, C Punkte einer Geraden oder Strahlen eines Büschels, so ist die Construction des 4ten harmonischen vollauf bekannt. Liegen aber die Punkte A, B, C wie hier auf einem Kegelschnitt, so müssen wir zuerst definiren, wann wir vier Punkte eines Kegelschnitts harmonisch nennen wollen. Diese Definition stützt sich auf den Satz, daß das Doppelverhältnis von 4 Strahlen, welche irgend 4 Punkte des Kegelschnitts von einem 5ten Punkte des Kegelschnitts aus projiciren, unabhängig ist von der Lage dieses Punktes. Man bezeichnet allgemein als Doppelverhältnis von vier Punkten des Kegelschnitts eben das Doppelverhältnis von vier solchen projicirenden Strahlen. Hiernach können wir entscheiden, wann vier Punkte A, B, C, D auf dem Kegelschnitt harmonisch liegen, d. h. wann das Doppelverhältnis der projicirenden Strahlen gleich − 1 ist. Wir behaupten: <u>Die Punkte liegen harmonisch, wenn die Verbindungslinien AB und</u>

<u>C D' conjugirte Polaren sind</u>. In diesem Falle ist nämlich A' (vergl. die Figur), der Pol von A B' auf BD' gelegen. Projiciren wir nun die Punkte A B' C D' speciell von A aus, so ergeben sich als projicirenden Strahlen die Geraden A C, A D', A A', A B'. Dieselben sind harmonisch, weil es ihre Schnittpunkte C, D', A', B' mit der Geraden C D' nach Voraussetzung sind. Also liegen auch die Punkte A, B', C, D' harmonisch, w.z.b.w.



Hiernach stellt sich die Construction des zu A, B', C gehörigen vierten harmonischen Punktes D' folgendermassen. Wir construiren den Pol A' zu der Geraden A B' und verbinden A' mit C. Der zweite Schnittpunkt der Geraden A'C mit dem Kegelschnitt ist der gesuchte Punkt D'.

Daneben stellen wir das <u>analytische</u>

Kriterium für die harmonische Lage.

Eine Gerade, welche die Punkte $a = 0$, $b = 0$ und $a = a'$, $b = b'$ verbindet, hat die Gleichung

$$ab' - ba' = 0.$$

Ist a', b' ein Punkt des Kegelschnittes mit dem Parameter ω, so wird zufolge der Einführung des Parameters ω. $a' : -b' = 1 : 2\omega$. Mithin lauten die Gleichungen derjenigen vier Strahlen, welche die Punkte ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 mit der auf dem Kegelschnitt gelegenen Coordinatenecke $a = 0$, $b = 0$ verbinden:

$$b + 2\omega_1 a = 0$$
$$b + 2\omega_2 a = 0$$
$$b + 2\omega_3 a = 0$$
$$b + 2\omega_4 a = 0.$$

Das Doppelverhältnis dieser vier Strahlen hat bekanntlich den Wert

$$\lambda = \frac{\omega_1 - \omega_4}{\omega_1 - \omega_4} : \frac{\omega_2 - \omega_3}{\omega_2 - \omega_4}.$$

Setzen wir noch homogen machend

$$\omega_1 = \frac{x_1}{y_1}, \quad \omega_2 = \frac{x_2}{y_2},$$

so können wir unter Einführung von zwei neuen Parametern μ und ν schreiben

$$\omega_3 = \frac{x_1 + \mu x_2}{y_1 + \mu y_2}, \quad \omega_4 = \frac{x_1 + \nu x_2}{y_1 + \nu y_2}$$

Dann findet man durch einfache Umrechnung

$$\lambda = \frac{\mu}{\nu}$$

Soll also $\lambda = -1$ werden, so muss $\nu = -\mu$ sein. Hiernach können wir das analytische Kriterium für die harmonische Lage folgendermassen formuliren: Sind 3 Punkte des Kegelschnittes mit den Parametern

$$\omega_1 = \frac{x_1}{y_1}, \quad \omega_2 = \frac{x_2}{y_2}, \quad \omega_3 = \frac{x_1 + \mu x_2}{y_1 + \mu y_2}$$

gegeben, so ist der zugehörige vierte harmonische Punkt der folgende:

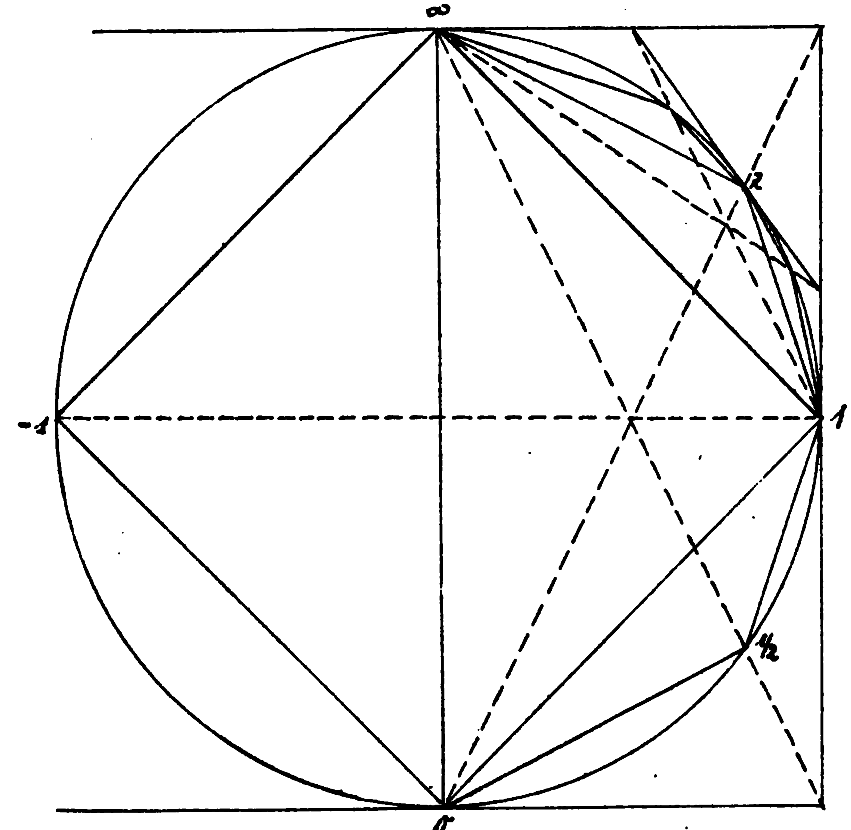
$$\omega_4 = \frac{x_1 - \mu x_2}{y_1 - \mu y_2}.$$

Es ist klar, dass wenn wir von rationalen Punkten $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ausgehen, wir durch unsere Construction und die parallel laufende Rechnung

immer wieder zu rationalen Punkten geführt werden. –

Wir gehen nun auf unsere specielle Kreisfigur zurück und construiren zu den Punkten 0, 1, ∞ auf alle Weisen den vierten harmonischen Punkt, indem wir unsere Construction auf den vorliegenden Fall specialisiren. Wir suchen also die Pole bez. zu den Geraden 0,1; 1,∞; ∞,0 auf und verbinden diese bez. mit den Punkten ∞, 0, 1. Die zweiten Schnittpunkte der Verbindungslinien mit dem Kreise liefern uns die drei 4ten harmonischen Punkte, welche bei veränderter Reihenfolge der Punkte 0, 1, ∞ möglich sind. Jene drei Verbindungsgeraden – wir können sie die „Hülfsgeraden" nennen – schneiden sich, wie man sieht in einem Punkte. Es folgt dieses aus dem Brianchon'schen Satze, nach welchem sich bekanntlich in jedem einem Kegelschnitt umschriebenen Sechsecke die 3 Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken in einem Punkte tref-

fen. Lässt man nämlich das allgemeine Sechseck in die drei doppelt zu zählenden Tangenten in den Punkten 0, 1, ∞ ausarten, so gehen die drei Verbindungslinien, von welchen der Brianchon'sche Satz spricht, in unsere drei Hülfsgeraden über. Den gemeinsamen Schnittpunkt der drei Hülfsgeraden können wir etwa als den „Mittelpunkt" des Dreiecks 0, 1, ∞ bezeichnen. Analytisch sind die drei



neuen auf der Kreisperipherie construirten Punkte nach der soeben abgeleiteten Formel für das Doppelverhältnis durch die Parameter $\frac{1}{2}, 2, -1$ bestimmt.

Zu unserem Ausgangsdreieck $0\ 1\ \infty$ haben wir durch diese Construction 3 neue Dreiecke hinzugezeichnet, nämlich die Dreiecke $\infty, 2, 1;\ 1, \frac{1}{2}, 0;\ 0, -1, \infty$. Jetzt wiederholen wir dieselbe Construction mit jedem dieser neuen Dreiecke. Wir finden dann je zwei neue Punkte des Kreises und dementsprechend je zwei neue Dreiecke. Indem wir so fortfahren, bilden wir einen geometrischen Algorithmus aus, durch welchen wir successive das ganze Innere des Kreises mit Dreiecken und die ganze Peripherie mit Punkten erfüllen, (welche dieselbe ersichtlich überall dicht bedecken). Jedes Dreieck ist dabei durch seine 3 Hülfsgeraden, die sich in seinem „Mittelpunkte" kreuzen, in sechs Unterdreiecke zerlegt. Die Frage wird sein, welche ω Werthe

den construirten Dreiecksecken zugehören, überhaupt wie sich unser geometrischer Process im analytischen Gewande darstellt.

Do. d. 16. I. 96. Hierbei können wir uns auf denjenigen Teil der Figur beschränken, welcher rechts von der Geraden $0\,\infty$ liegt und welcher die Punkte mit positivem Parameter ω enthält. Die Verteilung des Parameters in der linken Hälfte der Figur ist nämlich eine ganz analoge: hier befinden sich die Punkte mit negativem ω, wobei der Punkt $-\omega$ aus dem Punkte $+\omega$ durch eine Umklappung um die Gerade $0\,\infty$ hervorgeht.

Wir fragen also nach dem arithmetischen Character derjenigen positiven ω-Werte, welche zu den bei unserer Construction successive erreichten Dreiecken gehören. Zunächst ist klar, dass alle diese Werte rationale Zahlen sind; denn einerseits sind es die Ausgangswerte $0, \infty, 1$, andererseits ist die Construction des vierten harmonischen Punktes eine rationale Ope=

ration. Wir schreiben daher die Parameter in die Form $\frac{\alpha}{\beta}$, wobei wir die Spaltung des ω in Zähler und Nenner allemal so vornehmen, dass diese positiv sind und keinen gemeinsamen Teiler besitzen. Für die Punkte $\omega = 0$ und $\omega = \infty$, wo diese Spaltung unbestimmt wird, setzen wir die Zerlegungen $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{0}$ fest.

Es seien nun $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ die beiden Eckpunkte einer Seite irgend eines unserer Constructionsdreiecke, wobei $\frac{a}{b}$ derjenige der beiden Eckpunkte sein möge, welcher den grösseren Parameter besitzt, so dass $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$. Gehen wir in der Construction einen Schritt weiter, so legt sich an die genannte Dreiecksseite ein neues Dreieck an, welches einen neuen rationalen Punkt unserer Scala liefert. Wir behaupten dann:

1.) <u>Für die beiden Eckpunkte $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ gilt die Relation</u>

$$\underline{a\,d - b\,c = 1}$$

2.) <u>Der Parameter der dritten Ecke des neuen Dreiecks berechnet sich aus den Parametern $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ der beiden</u>

anderen Ecken nach der Formel:

$$\omega = \frac{a+c}{b+d}.$$

Diese Behauptungen beweisen wir durch vollständige Induction. Was zunächst die Ausgangspunkte $\frac{a}{b} = \frac{1}{0}$ und $\frac{c}{d} = \frac{0}{1}$ betrifft, so genügen diese der Relation 1); auch hat der durch unsere Construction zunächst gelieferte Punkt 1 die sub 2) angegebene Form $\omega = \frac{1+0}{0+1}$. Indessen war die Benennung dieser drei Punkte doch nur eine conventionelle, sie ergab sich nicht als notwendige Folge aus unserer Construction. Um daher die Richtigkeit unserer Angaben für den ersten Schritt des Verfahrens darzuthun, gehen wir auf die Dreiecksseite $\frac{a}{b} = \frac{1}{1}$, $\frac{c}{d} = \frac{0}{1}$ ein und betrachten ausserdem den Punkt $\omega = \frac{1}{2}$. Für diese bestehen die Behauptungen 1) und 2) ersichtlich gleichfalls zurecht. Wir nehmen nun an, dafs wir durch eine beliebige Anzahl von Constructionen zu einem Dreiecke gelangt sind, dessen Eckpunkte,

den angegebenen Regeln entsprechend die Parameter haben:

$$\frac{a}{b},\ \frac{c}{d},\ \frac{a+c}{b+d} \quad \text{mit } ad - bc = 1.$$

An dieses Dreieck setzen sich durch eine abermalige Wiederholung unserer Construction zwei neue Dreiecke an. Wir betrachten dasjenige Dreieck, welches mit dem vorhergehenden die Seite $\frac{a+c}{b+d}$ bis $\frac{c}{d}$ gemein hat. Die Frage wird sein, ob auch die Ecken dieses Dreiecks den angegebenen Regeln genügen. Zwei seiner Ecken sind uns bekannt; es sind dieses die Punkte $\frac{a+c}{b+d}$ und $\frac{c}{d}$. Wir bezeichnen dieselben jetzt kürzer mit $\frac{a'}{b'}$ bez. $\frac{c'}{d'}$, und bemerken, daß wir danach statt $\frac{a}{b}$ auch schreiben können: $\frac{a'-c'}{b'-d'}$.
Es ist nun erstlich

$$a'd' - b'c' = (a+c)d - (b+d)c = ad - bc = 1,$$

so daß die Behauptung 1) auch für das neue Dreieck richtig ist. Die dritte Ecke des in Rede stehenden Dreiecks ist unserer Construction zufolge als vierter harmonischer Punkt zu den Ecken

$\frac{a'}{b'}, \frac{c'}{d'}$ und $\frac{a}{b} = \frac{a'-c'}{b'-d'}$

bestimmt. Nach pg. 191 hat dieser vierte harmonische Punkt daher den Parameter

$$\frac{a'+c'}{b'+c'}.$$

Damit ist auch die Richtigkeit unserer Behauptung 2) für das neue Dreieck bewiesen. Mithin gelten unsere obigen Regeln überhaupt für jedes Dreieck, welches durch beliebige Wiederholung unserer Construction erreicht wird.

Den Kernpunkt dieses Beweises erblikken wir darin, daß nach Verabredung die Spaltung der Parameterwerte in einen Zähler und Nenner ohne gemeinschaftlichen Teiler erfolgte. Hierauf stützten wir uns wesentlich im Vorstehenden, indem wir aus der Gleichung $\frac{a'}{b'} = \frac{a+c}{b+d}$ folgerten:

$$a' = a+c, \; b' = b+d.$$

Wir betrachten einmal die ganze Reihe der nach einer gewissen Anzahl von Constructionen erreichten positiven Parameterwerte. Sie möge aus den

folgenden Brüchen bestehen:

$\frac{1}{0}, \dots \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \dots\dots, \frac{0}{1}$.

Diese Reihe liefert uns die bis zu einem gewissen Grade der Dichtigkeit gediehene Scala unserer rationalen Punkte. Dabei gilt zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Werten der Reihe die Relation $ad - bc = 1$. Wollen wir die Scala weiter vervollständigen, so haben wir die Werte $\frac{a+c}{b+d}$ zwischenzuschalten. Mit Reihen dieser Art beschäftigt sich <u>Hurwitz</u> im 44ten Bande der Mathem. Annalen (1894). Er nennt dieselben <u>Farey'sche Reihen</u> (nach dem englischen Mathematiker Farey, welcher von der Theorie der musikalischen Intervalle ausgehend auf diese Reihen geführt wurde).

Wir fragen nun weiter, welche rationalen Zahlen $\frac{a}{b}$ bei unserer Construction als Dreiecksseiten auftreten. Die Antwort hierauf lautet einfach folgendermassen: <u>Unser Process liefert successive alle rationa-</u>

len Zahlen $\frac{a}{b}$ und alle rationalen Zahlenpaare $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ von der Determinante $ad - bc = 1$. Den Beweis hierfür knüpfen wir an die uns bekannten Sätze über Kettenbruchentwickelung an. Indem wir eine rationale Zahl $\frac{a}{b}$ in einen Kettenbruch entwickeln, construiren wir eine Reihe von Näherungsbrüchen $\frac{p}{q}$, zwischen welchen die Recursionsformeln bestehen.

$$\frac{p_r}{q_r} = \frac{a_r p_{r-1} + p_{r-2}}{a_r q_{r-1} + q_{r-2}} \;.$$

Ausser diesen, den sog. Hauptnäherungsbrüchen, betrachteten wir die Nebennäherungsbrüche, welche durch die Formel gegeben waren

$$\frac{\varrho p_{r-1} + p_{r-2}}{\varrho q_{r-1} + q_{r-2}} \qquad \varrho = 1, 2, \ldots (a_r - 1).$$

Die Reihe der Näherungsbrüche begann mit den fingirten Brüchen

$$\frac{p_{-1}}{q_{-1}} = \frac{0}{1}, \quad \frac{p_0}{q_0} = \frac{1}{0}.$$

Die Gesamtheit dieser Brüche können wir in das folgende Schema anordnen:

$$
\begin{array}{l|l}
 & \dfrac{p_{-1}}{q_{-1}} = \dfrac{0}{1} \\[2ex]
 & \dfrac{p_0}{q_0} = \dfrac{1}{0} \\[2ex]
\dfrac{p_0 + p_{-1}}{q_0 + q_{-1}},\ \dfrac{2p_0 + p_{-1}}{2q_0 + q_{-1}}, \dots, \dots, \dots\dots, \dfrac{\mu_1 p_0 + p_{-1}}{\mu_1 q_0 + q_{-1}} = & \dfrac{p_1}{q_1} = \dfrac{\mu_1}{1} \\[2ex]
\dfrac{p_1 + p_0}{q_1 + q_0},\ \dfrac{2p_1 + p_0}{2q_1 + q_0}, \dots, \dots, \dots\dots \dfrac{\mu_2 p_1 + p_0}{\mu_2 q_1 + q_0} = & \dfrac{p_2}{q_2} = \mu_1 + \dfrac{1}{\mu_2} \\
 & \vdots \qquad\qquad \vdots \\
\dfrac{p_{n-1} + p_{n-2}}{q_{n-1} + q_{n-2}},\ \dfrac{2p_{n-1} + p_{n-2}}{2q_{n-1} + q_{n-2}}, \dots, \dots, \dots\dots \dfrac{\mu_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\mu_n q_{n-1} + q_{n-2}} = & \dfrac{p_n}{q_n} = \dfrac{a}{b}
\end{array}
$$

Dabei berechnet sich jeder Näherungsbruch aus zwei anderen Näherungsbrüchen vermöge der oben angegebenen Recursionsformeln in der Weise, dass Zähler und Nenner jenes gleich der Summe in Zähler und Nenner dieser wird. Drei in solcher Weise zusammengehörige Brüche

sind in unserem Schema durch Verbin-
dungslinien gekennzeichnet; sie erschei-
nen hier als Ecken eines Dreiecks. An-
drerseits schreiten wir bei der Con-
struction der rationalen Punkte auf
der Kreisperipherie von einem Dreieck
zu einem nächsten fort, wobei die
Ecken eines jeden dieser Dreiecke
ebenfalls nach dem gerade genann-
ten Gesetze zusammengehören. Die
sämtlichen Dreiecke unseres Schemas
sind daher im Sinne unserer Construc-
tion „Farey'sche Dreiecke" und die
sämtlichen Zahlen unseres Schemas
bezeichnen Punkte der Kreisperiphe-
rie, welche für unsere Construction
erreichbar sind. Ins Besondere ist
$\frac{a}{b}$ ein solcher Punkt. Nun ist aber $\frac{a}{b}$
eine ganz beliebige rationale Zahl,
weil doch eine beliebige rationale
Zahl in einen Kettenbruch ent-
wickelt werden kann. Mithin ist
jeder in ω rationale Punkt der
Kreisperipherie für unsere Con-
struction erreichbar. Hiermit ist

der erste Teil unserer obigen Aussage bewiesen. Es hat sich nebenbei die interessante Thatsache ergeben, daß die Reihe der Hülfspunkte, welche wir bei unserer Construction berühren müssen, um zu dem vorgelegten rationalen Werte von ω zu gelangen, übereinstimmt mit den Näherungsbrüchen in der Kettenbruchentwickelung dieses Wertes.

Die in unserem Schema verlaufenden Verbindungslinien deuten noch eine andere Eigenschaft der Näherungsbrüche, nämlich den Determinantensatz der Kettenbruchentwickelung, an. Es haben nämlich je zwei Näherungsbrüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ die Determinante $ad - bc = +1$, wenn $\frac{a}{b}$ an dem unteren, $\frac{c}{d}$ an dem oberen Ende einer Verbindungslinie steht. Umgekehrt wird jede Lösung c, d der Diophantischen Gleichung $ad - bc = 1$, in welcher wir uns a und b irgendwie teilerfremd gegeben denken, wie wir früher

zeigten durch einen Näherungsbruch der Kettenbruchentwickelung von $\frac{a}{b}$ geliefert. Die beiden Zahlen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ erscheinen daher in unserem Schema als Endpunkte einer Verbindungslinie. Alle Verbindungslinien unseres Schemas ergeben aber bei der Construction am Kreise Dreieckseiten. Daher muss jedes Zahlenpaar $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$, welches der Diophantischen Gleichung $ad-bc=1$ genügt, in unserer Construction als Begrenzung einer Dreiecksseite auftreten. Hiermit ist auch der zweite Teil unserer obigen Behauptung erwiesen.

Wir führen noch im Anschluss an Hurwitz eine bequeme Bezeichnung ein. Wir nennen die Verbindungslinie zweier Punkte $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ der Kreisperipherie, wenn sie der Gleichung $ad-bc=+1$ genügen, eine <u>Elementarsehne erster Art.</u> Das zuletzt Bewiesene können wir hiernach so ausdrücken: Die Gesamtheit der Elementarsehnen

erster Art des Kreises fällt mit der Gesamtheit der Dreiecksseiten bei unserer Construction zusammen. Wir bezeichnen ferner als Elementarsehne zweiter Art die Verbindungslinie zweier Punkte $\frac{a'}{b'}$ und $\frac{c'}{d'}$ des Kreises von der Determinante $a'd'-b'c' = 2$. Es zeigt sich, dass die Hilfsgeraden unserer Construction solche Elementarsehnen zweiter Art sind, und dass wieder die Gesamtheit der Elementarsehnen zweiter Art mit der Gesamtheit der Hülfsgeraden zusammen fällt.

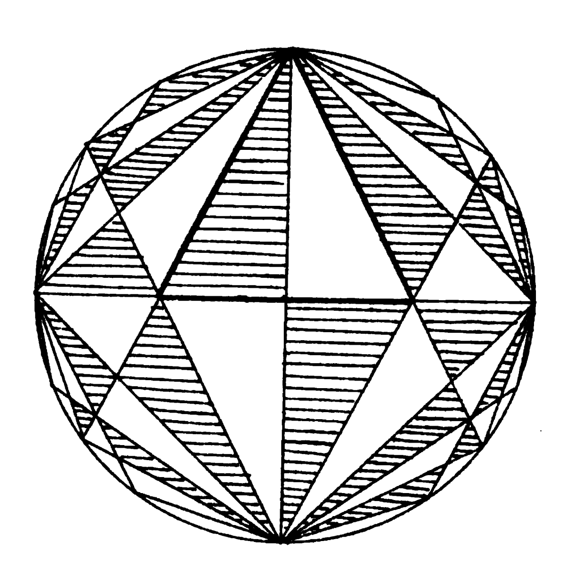
Fr. 17. I. 96. Wir bringen heute an unserer bisherigen Figur noch einen scheinbar äusserlichen Zusatz an; wir werden dadurch erreichen, dass uns dieselbe ausser der Scala der rationalen Punkte auch die Einteilung des Kreisinneren in eine unendliche Anzahl unter sich aequivalenter Parzellen zur Erscheinung bringt.

Wir bemerken nämlich, dass jedes unserer Constructionsdreiecke durch

die Hülfsgeraden in 6 Unterdreiecke ge=
teilt wird. Diese Unterdreiecke wollen wir
abwechselnd schraffiren, so daß sich
jedes schraffirte Dreieck mit seinen
3 Seiten an 3 nichtschraffirte Dreiecke
anlegt und umgekehrt. Es stossen
dann in den „Mittelpunkten" der
Constructionsdreiecke je 3 schraffirte
Dreiecke zusammen, in den „Mittel=
punkten" der Seiten jener Dreiecke
(wenn wir so diejenigen Punkte jener
Seiten bezeichnen, in welchen dieselben
von den durch den gegenüberliegenden
Eckpunct gehenden Hülfsgeraden ge=
schnitten werden) je zwei und in den
Ecken der Constructionsdreiecke je un=
endlich viele schraffirte Dreiecke zu=
sammen. In's Besondere liefern ein
gewisses schraffirtes und ein gewisses
nichtschraffirtes Dreieck zusammen
gerade das pg. 184 abgegrenzte redu=
cirte Gebiet, vergl. überall die Figur
der folgenden Seite.

Es ist nun möglich, jedes schraffirte
bez. nicht schraffirte Dreieck unserer

Figur durch eine und nur durch eine Sub-
stitution $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ in den schraffirten bez. nichtschraffirten Teil des reducirten Raumes zu transformiren. Und umgekehrt gibt es zu jeder solchen Substitution ein und auch nur ein schraffirtes und nicht schraffirtes Dreieck unserer Figur, welches durch jene Substitution in den reducirten Raum verlegt wird.



Zum Beweise greifen wir irgend ein Dreieck unserer Figur heraus. Dasselbe ist ein Unterbestandteil eines der Constructionsdreiecke; eine Seite desselben fällt in eine Seite dieses Dreiecks, also in eine Elementarsehne erster Art, während seine beiden anderen Seiten

Stücke von Hülfsgeraden, also von Elementarsehnen zweiter Art sind. Es handle sich etwa um das mit einem * versehene nicht schraffirte Dreieck. (vergl. die f. Figur). Die Endpunkte der zum Dreiecke gehörigen Elementarsehne erster Art seien $\frac{\alpha}{\gamma}$ und $\frac{\beta}{\delta}$. Die Endpunkte der beiden Elementarsehnen zweiter Art sind dann: $\frac{\alpha}{\gamma}$ und $\frac{\alpha+2\beta}{\beta+2\delta}$ bez. $\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}$ und $\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}$. Andererseits ist der nichtschraffirte Teil des reducirten Raumes von der Elementarsehne erster Art $\infty, 0$ und den Elementarsehnen zweiter Art $\infty, \frac{1}{2}$ und $1, -1$ begrenzt. Wir betrachten daher die folgenden Punktepaare samt den sie verbindenden Geraden:

einer- seits
$$\begin{cases} \frac{\alpha}{\gamma}, & \frac{\beta}{\delta} \\ \frac{\alpha}{\gamma}, & \frac{\alpha+2\beta}{\gamma+2\delta}, \\ \frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}, & \frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta} \end{cases}$$
anderer- seits
$$\begin{cases} \infty, & 0 \\ \infty, & \frac{1}{2} \\ +1, & -1 \end{cases}$$

Wir können nun unmittelbar eine lineare Transformation angeben, welche die Punkte der ersten Serie in die daneben stehenden Punkte der zweiten Serie überführt. Wir haben nämlich, wenn ω irgend einen der ersteren, ω' irgend einen der letzteren Punkte bedeutet.

$$\omega = \frac{\alpha\omega' + \beta}{\gamma\omega' + \delta}.$$

Aber mit dieser Substitution, resp. der durch sie gegebenen Vertauschung der Kegelschnittpunkte ist nach pg. 183 eine Collineation der ganzen Ebene, die den Kegelschnitt in sich überführt, notwendig verbunden, nämlich die Collineation

$$\begin{aligned} \rho a' &= \alpha^2 . a + \alpha\gamma . b + \gamma^2 . c, \\ \rho b' &= 2\alpha\beta . a + (\alpha\delta + \beta\gamma) . b + 2\gamma\delta . c, \\ \rho c' &= \beta^2 . a + \beta\delta . b + \delta^2 . c. \end{aligned}$$

Diese führt die Verbindungslinie von $\frac{\alpha}{\gamma}$ und $\frac{\beta}{\delta}$ in die Verbindungslinie von ∞ und 0 etc., d.h. unser nicht-schraffirtes Dreieck in die nicht schraffirte Hälfte des reducirten Raumes über. Da aber jenes Dreieck ein ganz beliebiges Dreieck unserer Construction darstellt, so erhalten wir das Resultat: <u>dass jedes beliebige (schraffirte oder nicht-schraffirte) Dreieck in das (schraffirte oder nicht-schraffirte) Dreieck des reducirten Raumes durch eine Collineation unserer Gruppe verwandelt werden kann.</u> Diese Collineation ist auch eindeutig bestimmt, wie aus den hingeschriebenen Formeln hervorgeht.

Andererseits wird jede Collineation unserer Gruppe, bez. jede ω-Substitution

$$\omega = \frac{\alpha\omega' + \beta}{\gamma\omega' + \delta}$$

ein Dreieck unserer Einteilung in das entsprechende Dreieck des reducirten Gebietes (nach dem Schema von pg 210 oben) überführen. <u>Es werden</u>

also auch alle Substitutionen der Gruppe dadurch erschöpft, dass wir verlangen, alle Dreiecke der Figur in das reducirte Gebiet zu verlegen.

Wenden wir umgekehrt auf das reducirte Gebiet die Gesamtheit unserer Collineationen an, so müssen wir die Gesamtheit unserer Dreiecke erhalten. Durch diese Bemerkungen ist die Berechtigung der Benennung: reducirtes Gebiet: auf's neue dargethan. Wir erkennen nämlich:

Es ist jeder Punkt des Kegelschnittinnern einem bestimmten Punkte des reducirten Gebietes aequivalent und umgekehrt sind keine zwei Punkte des reducirten Gebietes unter sich aequivalent. Die Punkte des reducirten Dreiecks stellen also alle reducirten Formen mit $D' < 0$ und jede nur einmal vor. Dieselbe Aussage können wir auch so formuliren: Das reducirte Gebiet bildet für das Kegelschnittinnere einen Fundamentalbereich der Gruppe unserer $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ Substi-

tutionen.

Die letzten Aussagen verlangen, wenn sie vollständig richtig sein sollen, noch eine schärfere Abgrenzung des reducirten Gebietes. Wir bemerken nämlich, dass unser reducirtes Gebiet, wie wir es bisher definirt haben, d. h. das Dreieck $\infty, \mathcal{E}, \mathcal{E}'$ schlechthin, gewisse Punkte, nämlich die Randpunkte enthält, welche unter sich aequivalent sind. Es entspricht dies bei unserer vorhergehenden Deduction dem Umstande, dass wir diese Randpunkte entweder dem reducirten Bereiche selbst oder einem seiner Nachbarbereiche zurechnen können. Wir betrachten die projective Beziehung $\omega' = \omega + 1$ der Kreisperipherie in sich; dieselbe führt die Punkte $\infty, -\frac{1}{2}$ des Kreises in die Punkte $\infty, +\frac{1}{2}$ über. Die Die zugehörige Collineation der Ebene bringt also die Seite $\infty\mathcal{E}$ unseres Dreiecks in die Seite $\infty\mathcal{E}'$! Die Substitution

$w' = w - 1$ bewirkt das Umgekehrte. Wir betrachten ferner die Substitution $w' = -\frac{1}{w}$, welche gleichfalls eine $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ Substitution ist. Dieselbe macht aus den Punkten $-1, +1$ des Kreises die Punkte $+1, -1$; sie führt also die Seite EE' unseres Dreiecks in sich über u. zw. in der Weise, dass die eine Hälfte FE derselben in die andere Hälfte FE' übergeht und umgekehrt. Die Randpunkte des Dreiecks sind also paarweise durch gewisse $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ Collineationen einander zugeordnet, sie sind paarweise aequivalent.

Wir deuten dieses in der Figur durch die Doppelpfeile an. <u>Soll unser reducirtes Dreieck im präcisen Sinne des Wortes ein Fundamentalraum sein, d. h. soll es nur nicht-aequivalente Punkte enthalten, so dürfen wir demselben nur den einen Teil des Randes, etwa den zum schraffirten Dreieck gehörigen Rand hinzurechnen, während wir den anderen Teil des Randes den Nachbardreiecken zuweisen.</u> Nach dieser Verschärfung ist jetzt der Satz ausnahmslos richtig:

dass jeder Punkt des Kreisinnern einen und nur einen aequivalenten Punkt im Fundamentalraum besitzt.

Wir werden dieselbe Verschärfung auch an der arithmetischen Definition der reducirten Formen anzubringen haben. Wir nannten eine definite Form (a, b, c) dann reducirt, wenn $|b| \leqq a \leqq c$ war. Dem Auftreten der Gleichheitszeichen in dieser Formel entspricht geometrisch, dass der bez. Punkt a, b, c auf den Rand des Fundamentalraumes rückt; er befindet sich, wenn $a = c$, auf der Geraden EE', wenn $|b| = a$ auf den Geraden ∞E oder $\infty E'$. Wenn wir also geometrisch dem reducirten Gebiete einen Teil seiner Randpunkte wegnahmen, so werden wir arithmetisch die Gültigkeit des Gleichheitszeichens unter Umständen ausschliessen müssen. Nun ist, bei unserer Annahme über die Lage des Einheitspunktes in dem beibehaltenen Teile des Randes $b > 0$, in dem fortgelassenen $b < 0$. Dementsprechend werden wir die Gleichheitszeichen in

der obigen Formel nur im Falle $b > 0$ bestehen lassen und werden jetzt die folgende schärfere Definition der reducirten Formen aufstellen: <u>Eine Form (a, b, c) ist im Falle $b > 0$ eine reducirte Form, wenn $b \leq a \leq c$, im Falle $b < 0$ aber dann, wenn $|b| < a < c$ ist</u>. Nach dieser Verbesserung unserer ursprünglichen Definition können wir den Satz (welcher übrigens nur ein anderer Ausdruck für einen Satz der vorigen Seite ist) als ausnahmslos richtig aussprechen: dass in jeder Klasse aequivalenter definiter Formen immer nur eine reducirte Form enthalten ist.

Wir kommen noch auf die Frage nach den <u>Automorphien</u> der definiten Formen zurück, weil uns die hierbei in Betracht kommenden Verhältnisse aus unserer Figur unmittelbar entgegentreten. Wie wir wissen, hängt das Vorhandensein der Automorphien von den Lösungen t und u der Pell'schen Gleichung

$$t^2 + \Delta u^2 = 4$$

ab, wo $-\Delta = D$ die Discriminante der

vorgelegten Form ist. Die Automorphie selbst ist dann eine Substitution

$$x = \alpha X + \beta Y$$

$$y = \gamma X + \delta Y$$

mit folgendem Coefficientenschema:

$$\begin{vmatrix} \frac{t - bu}{2} & -cu \\ au & \frac{t + bu}{2} \end{vmatrix}$$

Haben wir eine Discriminante $\Delta > 4$, so besitzt die Pell'sche Gleichung ersichtlich nur die trivialen Lösungen: $t = \pm 2$, $u = 0$, welche zu den Automorphien Anlass geben $\begin{vmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{vmatrix}$. Die Form geht also bei $\Delta > 4$ nur dann in sich über, wenn wir x und y entweder ungeändert lassen oder beide gleichzeitig im Vorzeichen vertauschen. Ist dagegen $\Delta = 4$, so giebt es ein zweites Lösungspaar der Pell'schen Gleichung, nämlich $t = 0$, $u = \pm 1$, und dementsprechend zwei weitere Automorphien. Ist endlich $\Delta = 3$, so liefert jede der vier Vorzeichencombinationen in $t = \pm 1, u = \pm 1$

eine Lösung der Pell'schen Gleichung. Zu den obigen Automorphien, die dem Lösungspaare $t = \pm 2$, $u = 0$ entsprechen, treten in diesem Falle noch 4 neue Automorphien hinzu. In den beiden letztgenannten Fällen $\Delta = 4$ und $\Delta = 3$ giebt es je nur eine Formenklasse, weil es nur eine reducirte Form giebt. Es ist dieses bez. die Form

$$x^2 + y^2 \text{ und } x^2 + xy + y^2.$$

Wir sehen nun zu, wie sich das Vorhandensein der Automorphien in unserer Figur darstellt. Zu dem Zwecke müssen wir von der Substitution $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ der Variabeln x und y zu der entsprechenden Substitution der Variabeln a, b, c übergehen. Die Substitution $\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ist natürlich in jenen, wie in diesen Variabeln die identische Substitution. Ferner bedeutet die Substitution $\begin{pmatrix}-1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$ in den Variabeln a, b, c gleichfalls die Identität, wie aus den Formeln von pg. 178 sofort einleuchtet. Daher kommt das Vorhandensein dieser zweiten

Automorphie in unserer Figur nicht zum Ausdrucke. Überhaupt ändert das gleichzeitige Umkehren der Vorzeichen in den Coefficienten der Substitution $\binom{\alpha\beta}{\gamma\delta}$ an der Collineation der Variabeln a, b, c durchaus nichts. Daher werden die 4 Automorphien im Falle $\Delta = 4$ und die 6 im Falle $\Delta = 3$ nur 2 bez. 3 verschiedene Collineationen in der Ebene der a, b, c ergeben können. Dass nun in der That 2 bez. 3 Collineationen vorhanden sind, bei denen die Form $x^2 + y^2$ bez. $x^2 + xy + y^2$ ungeändert bleibt, ersieht man aus unserer Figur. Die Form $x^2 + y^2$ wird nämlich durch den Punkt $1, 0, 1$ repräsentirt, den wir in der Figur von pg. 213 mit F bezeichnet haben, die Form $x^2 + xy + y^2$ wird durch den Einheitspunkt E mit den Coordinaten $1, 1, 1$ dargestellt. Im Punkte F stossen 2, im Punkte E 3 schraffirte (und ebensoviele nicht schraffirte) Dreiecke zusammen. Die Collineationen, durch welche diese 2 bez. 3 schraffirten Dreiecke in das

schraffirte Dreieck des reducirten Raumes verwandelt werden, sind die Automorphien der Form x^2+y^2 bez. x^2+xy+y^2. Das Vorhandensein und die Bedeutung der Automorphien im Falle $\Delta = 4$ und $\Delta = 3$ leuchtet also aus der Anordnung unserer Dreiecksfigur direct ein. Ebenso erkennen wir aus der Figur, dass es keine anderen Classen definiter Formen mit aussergewöhnlichen Automorphien giebt als die genannten beiden.

Do. d. 23. I. Wir ziehen jetzt auch Substitutionen

$$\omega' = \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$$

von der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$ hinzu. Auch diese haben in unserer Figur eine einfache Bedeutung. Wir betrachten zunächst die specielle Substitution

$$\omega' = -\omega,$$

welche ersichtlich die Determinante -1 besitzt. Die zugehörige Collineation der a, b, c lautet nach pg. 210:

$$\varrho a' = a, \quad \varrho b' = -b, \quad \varrho c' = c$$

und bedeutet eine gewöhnliche Spiegelung an der Mittellinie unserer Figur, eine Vertauschung von rechts und links. Das Wort Spiegelung werden wir im Folgenden jedoch in einem allgemeineren Sinne gebrauchen. Handelt es sich nicht, wie soeben um einen Durchmesser des Kreises sondern um eine beliebige Sehne desselben, so verstehen wir unter Spiegelung eine Operation, welche man in der projectiven Geometrie als harmonische Perspective bezeichnet. Dieselbe wird folgendermassen definirt: Man construire den Pol P der Sehne und ordne jedem Punkte Q der Ebene denjenigen Punkt Q' der Verbindungslinie PQ zu, welcher mit Q harmonisch liegt in Bezug auf den Pol P und den Schnittpunkt von

P'A mit der Polaren von P. Der Pol P bildet das „Centrum" unsere Sehne die „Axe" dieser Perspective. Diese Operation stellt die projective Verallgemeinerung der gewöhnlichen Spiegelung dar und geht in jene über, wenn wir die Sehne speziell in einen Durchmesser des Kreises rücken lassen.

Wir betrachten jetzt die Gesamtheit der Substitutionen von der Determinante ± 1. Dieselben bilden eine Gruppe, welche wir im Gegensatz zu der früheren die <u>erweiterte Gruppe</u> nennen. Wir erhalten übrigens diese ganze Gruppe, wenn wir zu der früheren Gruppe von Substitutionen mit der Determinante $+1$ noch die spezielle Substitution $\omega' = -\omega$ von der Determinante -1 hinzunehmen. Denn wir können jede Substitution von der Determinante -1 durch Combination dieser speciellen mit einer Substitution von der Determinante $+1$ darstellen. (Der Deutlichkeit halber sei noch ausdrücklich hervorgehoben, dass die

zugehörigen Substitutionen der a, b, c auch jetzt die Determinante +1 haben, denn sie ist gleich $(\alpha\delta - \beta\gamma)^2$.)

Der Fundamentalbereich dieser erweiterten Gruppe besteht aus einem einzelnen schraffirten (oder nicht-schraffirten) *Dreieck*, etwa aus dem schraffirten Dreieck des reducirten Raumes, in demselben Sinne, wie bei unserer früheren Gruppe der Fundamentalbereich von dem Doppeldreiecke des reducirten Raumes gebildet wurde. In der That zeigt sich, daß jeder Punkt des Kreisinnern durch eine Operation unserer Gruppe in das schraffirte Dreieck des reducirten Raumes verlegt werden kann, und daß keine zwei Punkte des schraffirten Dreiecks unter sich aequivalent sind. Man kann nämlich erstlich jeden Punkt durch eine $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ Substitution von der Determinante +1 in den reducirten Raum überhaupt überführen. Fällt er dabei in das nichtschraffirte Dreieck, so bringt man ihn durch die

Operation $w' = -w$ in das schraffirte Dreieck hinein. Fällt er in das schraffirte Dreieck, so ist das Gewünschte ohnedies erreicht. Dass auch keine zwei Punkte des schraffirten Dreiecks unter sich aequivalent sein können, ergibt sich aus der Erzeugung der erweiterten Gruppe mittelst der Operationen von der Determinante $+1$ und der speciellen Operation $w' = -w$, deren Wirkung uns einzeln bekannt ist.

<u>Die arithmetische Definition des neuen Fundamentalbereichs ist diese:</u>

$$0 \leqq b \leqq a \leqq c$$

(wo überall die Gleichheitszeichen mitzählen).

Wir können jetzt die Construction unserer Figur nach einem neuen Princip beschreiben, indem wir die Operation der Spiegelung in dem oben festgestellten Sinne an die Spitze stellen. Wir gehen von dem schraffirten Dreieck des reducirten Raumes aus und bemerken, daß die 3 anliegenden nicht-schraffirten Dreiecke aus diesem durch

Spiegelung an der gemeinsamen Dreiecksseite entstehen. Bei zweien dieser Dreiecke ist das ohne weiteres klar, weil es sich bei ihnen um eine gewöhnliche Spiegelung handelt. Bei dem dritten Dreiecke, wo die Spiegelung als harmonische Perspective erklärt werden muss, folgt das Behauptete aus der Entstehung unserer Figur durch harmonische Construction. Wir betrachten sodann eines dieser drei nicht schraffirten Dreiecke und die ihm anliegenden drei schraffirten. Auch diese gehen wegen der fundamentalen Eigenschaften unserer Figur aus dem nicht-schraffirten durch Spiegelung an den gemeinsamen Dreiecksseiten hervor. Dasselbe gilt überhaupt für jedes Dreieck unserer Figur und die dasselbe umgebenden drei Nebendreiecke, weil die Spiegelung eine projective Operation ist und weil jedes Dreieck unserer Figur mit jedem anderen projectiv verwandt ist. <u>Wir können daher die</u>

ganze Figur dadurch successive entstehen lassen, dass wir jedes einzelne Elementardreieck, welches wir erhalten, immer auf's Neue an seinen Seiten spiegeln. Da alle Dreiecksseiten, zu denen wir so gelangen, Elementarsehnen sind, d.h. rationale Punkte $\frac{\alpha}{\gamma}$ und $\frac{\beta}{\delta}$ der Kreisperipherie verbinden, so werden alle unsere Spiegelungen ganzzahlige Substitutionen $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ u. zw. natürlich ganzzahlige Substitutionen von der Determinante -1. Speziell ist dabei $\alpha + \delta = 0$. Von hier aus bestätigt man sofort, dass jeder Punkt des Kegelschnittinneren mit jedem Punkte des schraffirten Elementardreiecks durch eine ganzzahlige Substitution $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ aequivalent ist, welche die Determinante $+1$ hat, wenn es sich um einen Punkt eines schraffirten Dreiecks, die Determinante -1, wenn es sich um einen Punkt eines nicht-schraffirten Dreiecks handelt. Die fragliche Substitution von der Determinante $+1$ oder -1 erhält man einfach durch zusammen-

setzung einer geraden oder ungeraden Anzahl von Einzelspiegelungen, durch welche man von dem Elementardreieck des reducirten Gebietes zu demjenigen Dreieck hingelangt, welchem der gerade betrachtete Punkt angehört.

Wir fragen auch bei dieser erweiterten Gruppe nach den Automorphien. Zu dem Ende denken wir uns zu einem Punkte a, b, c die Gesammtheit seiner im Sinne der erweiterten Gruppe aequivalenten Punkte, d. h. das System seiner Spiegelpunkte hinzu. (Man denke an die Anordnung der Spiegelbilder bei einem Kaleidoskop.) Eine Automorphie liegt dann und nur dann vor, wenn zwei Punkte dieses Systems zusammenrücken. Da aber je zwei Spiegelpunkte durch eine Dreiecksseite getrennt werden, findet dieses nur dann statt, wenn der Punkt a, b, c in einer Dreiecksseite gelegen ist. In diesem Falle bleibt

unser Punkt bei zwei Operationen der erweiterten Gruppe ungeändert, nämlich bei der identischen Operation und bei der Spiegelung an der betr. Dreiecksseite. Ein spezieller Fall hiervon ist es, wenn der Punkt in eine Dreiecksecke hineinrückt. Alsdann rücken aus dem System der aequivalenten Punkte 4, 6 oder gar unendlich viele Punkte in dieselbe Ecke hinein, je nachdem es sich um eine Ecke handelt, welche mit den Punkten, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{E}$ oder ∞ des reducirten Gebietes (vergl pg. 213.) aequivalent ist. Dementsprechend bleibt ein solcher Punkt bei 4, 6 oder unendlich vielen Operationen der erweiterten Gruppe ungeändert.

Wollen wir die entsprechenden Resultate für quadratische Formen aussprechen, so müssen wir berücksichtigen, dass die Anzahl der Automorphien durch Hinzunahme der Substitution $x = -x'$, $y = -y'$, welche auf unsere Figur keine

Wirkung ausübt, sich verdoppelt. Daraufhin formuliren wir die folgenden Sätze:

1. Eine beliebige binäre definite Form geht durch zwei Automorphien der erweiterten Gruppe in sich über, nämlich durch die identische Substitution und durch die Operation $x = -x'$, $y = -y'$!

2. Wenn der repräsentirende Punkt in einer Elementarsehne unserer Figur liegt, so bleibt die Form bei 4 Operationen ungeändert.

3. Wenn der repräsentirende Punkt in eine Dreiecksecke rückt, so wird die Form durch 8 oder durch 12 oder auch durch unendlich viele Operationen der erweiterten Gruppe in sich transformirt.

Wir stellen noch die arithmetischen Kriterien für das Vorhandensein aussergewöhnlicher Automorphien zusammen, wobei wir jedoch nur von der Formenclasse sprechen und diese durch ihre reducirte Form repräsentiren. Hinsichtlich des Satzes 2) haben wir zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der reducirte Re-

präsentant der Klasse einer Elementarsehne erster oder zweiter Art angehört.
Im ersten Falle ist

$$b = 0,$$

im zweiten

$$b = a \quad \text{oder} \quad a = c.$$

Der zweite Fall zerlegt sich hiernach noch in zwei Unterarten a) und b). Um dieselben in algemeingültiger Weise von einander zu sondern, bemerke man, dass jede Elementarsehne zweiter Art zwei Dreiecksecken E trägt,

welche dieselbe in ein inneres und zwei äussere Stücke zerlegt. Im Falle a) liegt der reducirte Punkt auf einem äusseren, im Falle b) auf einem inneren Stücke der Elementarsehne zweiter Art. Die Aussagen des Satzes 3) greifen Platz, wenn der repräsentirende Punkt in eine Ecke unserer Dreieckstellung hineinrückt. Lassen wir die auf der Peripherie gelegenen Ecken ausser Acht, weil wir doch von definiten Formen sprechen

und diese im Innern des Kreises ihre Darstellung finden, so haben wir wiederum zwei Fälle zu unterscheiden. Im ersten Falle ist die reducirte Form characterisirt durch

$b = 0,\ a = c$ (d.h. den Punkt F)

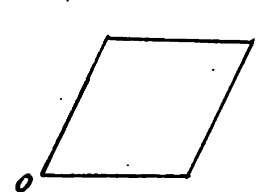
im zweiten Falle durch

$a = b = c$ (den Punkt E).

Auch die arithmetische Theorie der quadratischen Formen beschäftigt sich mit den soeben aufgezählten Ausnahmeformen. Sie werden dort Anceps-Formen oder auch Ambige Formen genannt. In unserem Sinne bedeutet das Wort Anceps eben dieses, daß der die Anceps-Form repräsentirende Punkt zwei Fundamentalbereichen zugerechnet werden kann.

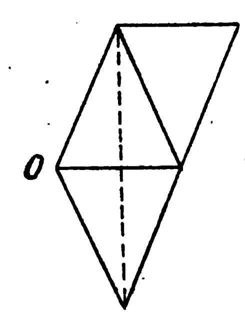
Da die Anceps-Formen für die spätere Theorie von besonderer Wichtigkeit sind, wollen wir ihre Eigenart noch durch die zugehörigen Gitter charakterisiren, wie bereits kurz vor Weihnachten begonnen wurde.

Entsprechend der allgemeinen Construction der Gitter, wonach bei definiten Formen die Seiten des Elementarparallelogrammes $\sqrt{a}$ und $\sqrt{c}$, der Winkel zwischen diesen $\varphi = \arc\cos \frac{b}{2\sqrt{ac}}$ betragen sollte, sind die Anceps-Klassen der ersten Art (mit dem Repräsentanten $b = 0$) dadurch characterisirt, daß sie ein <u>Rechteckiges Punktgitter</u> besitzen. Wir können nämlich ihr Gitter, indem wir eine geeignete Form, eben die reducirte Form mit $b = 0$, also $\varphi = 90°$ der Klasse, herausgreifen, aus einzelnen Rechtecken aufbauen.



Ferner sind die Anceps-Klassen der zweiten Art dadurch ausgezeichnet, daß ihr Punktgitter durch ein System von <u>Rhomben</u> erzeugt werden kann. Liegt nämlich die erste Unterart mit dem Repräsentanten $a = c$ vor, so liefert die reducirte Form der Klasse direkt ein Parallelgitter mit

rhombischen Elementarparallelogrammen.



Liegt die zweite Unterart vor ($a = b$), so ist für die reducirte Form $\sqrt{c} \cdot \cos \gamma = \frac{\sqrt{a}}{2}$, so dass die eine Hälfte des Elementarparallelogramms ein gleichschenkliges Dreieck wird. Man stellt dann durch eine Umordnung der Gitterstäbe, wie aus der nebenstehenden Figur ersichtlich ist, aus dem Parallelgitter der reducirten Form wiederum ein rhombisches Gitter her. Diese beiden Unterarten können noch durch den bei O gelegenen Winkel der Rhomben unterschieden werden. Im ersten Falle ($a = c$) besteht nach der Definition unseres a, b, c-Coordinatensystems für die Coefficienten der reducirten Form die Ungleichung $b < a$. Daher haben wir in dem rhombischen Gitter der reducirten Form $\cos \gamma = \frac{b}{2a} < \frac{1}{2}$ oder $\gamma > 60°$. Im zweiten Falle ($a = b$) gilt für die Coefficienten der reducirten Form die Unglei-

chung $a < c$. Mithin wird in dem Gitter der reducirten Form $\cos\mathfrak{C} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{c}} < \frac{1}{2}$ oder $\mathfrak{C} > 60°$. In dem aus dem reducirten Gitter erzeugten rhombischen wird der Winkel bei 0 gleich $2\mathfrak{C}$ oder $> 120°$. Der zweite Winkel im Rhombus ergänzt diesen ersten selbstverständlich zu 180°. Wir können daher sagen: die Winkel der Rhomben unterscheiden sich im ersten Falle von einem Rechten um weniger, im zweiten Falle um mehr als 30°.

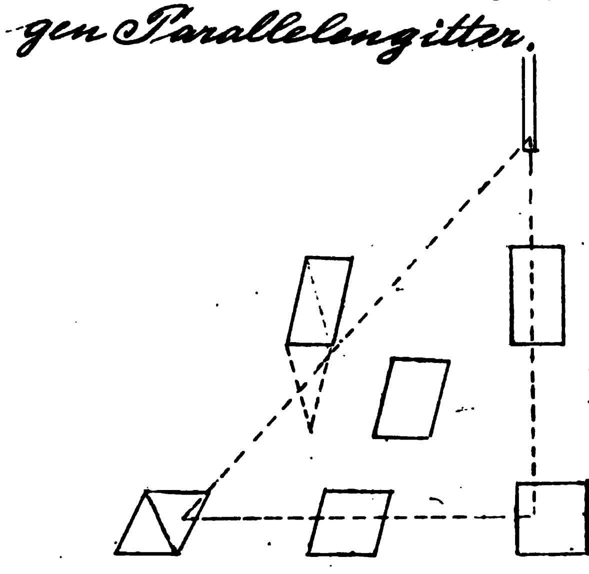
Die höheren Ausnahmefälle, denen 8 und 12 Automorphien entsprechen, ordnen sich in die aufgezählten Gitter als Grenzfälle ein. So bildet diejenige Klasse, deren reducirte Form die Coefficienten $a = b = c$ hat, den Übergang zwischen unsern beiden Unterarten von rhombischen Gittern. Wir haben daher hier einen Rombus mit einem Winkel von 60° als Elementarparallelogramm. Das zu dieser Klasse gehörige Gitter bezeichnen wir als gleichseitiges, weil es durch Aneinanderlagerung von

gleichseitigen Dreiecken erzeugt werden kann. Andererseits bildet der Fall $a = c$, $b = 0$ den Uebergang von den rhombischen zu den rechteckigen Gittern. Das Elementarparallelogramm dieses Falles ist daher gleichzeitig ein Rhombus und ein Rechteck, d. h. es ist ein Quadrat. Demnach wird das Gitter dieser Klasse als quadratisches Gitter zu bezeichnen sein.

Wollen wir schliesslich auch noch die dritte Ecke unseres Fundamentalbereichs $a = 0$, $b = 0$ berücksichtigen, so haben wir für diese ein ausgeartetes Elementarparallelogramm mit der Seite $\sqrt{a} = 0$ zu verzeichnen. Übrigens müssten wir dasselbe von rechtswegen unendlich lang zeichnen, weil sein Inhalt die endliche Grösse $-(b^2 - 4ac)$ betragen soll.

Endlich gehören zu den allgemeinen quadratischen Formen, deren repräsentirende Punkte im Innern des Fundamentalbereiches liegen, Gitter von denen wir auf Grund der

Ungleichungen $0 < b < a < c$ nur aussagen können, dass ihr Winkel $\mathfrak{C} > 60^\circ$ ist, und dass die Seite Vc jedesmal länger ist als die Seite Va. Fragen wir die den einzelnen Stellen des Fundamentalbereiches zugehörigen Parallelogramme in dem folgenden Schema andeutungsweise ein, erhalten wir eine Übersicht über den continuirlichen Zusammenhang zwischen der Lage der Punkte a, b, c im Fundamentalbereiche und der Gestalt der zugehörigen Parallelengitter.



Indem wir unsere Betrachtung der definiten Formen beschliessen, betonen wir nochmals die Schönheit unserer Dreieckscontructionen, welche die ganze Theorie der Aequivalenz in sich enthalten. Diese Schönheit ruht natürlich auf dem hohen Grade der Symmetrie, welche die Figur besitzt, d.h. auf der grossen Zahl von Transformationen, welche dieselbe in sich selbst überführen. Man darf wohl sagen, dass die moderne Geometrie keine Figur aufgedeckt hat, welche einen so weitgehenden Gedankeninhalt besässe. Über die Zahlentheorie hinaus beherrscht unsere Figur die Theorie der elliptischen Modulfunctionen und leitet von hier aus zu den automorphen Functionen über, in deren Theorie ähnliche (verallgemeinerte) geometrische Constructionen Platz greifen. Auch auf höhere Gebiete der Zahlentheorie lässt sich unser geometrisches Verfahren verallgemeinern. Deutet man beispielsweise die Coefficienten von quadra-

tischen Formen mehrere Veränderlicher als homogene Coordinaten in einem Raume von genügend hohen Dimensionenzahl, so wird sich als Ort der definiten Formen ein Gebiet abgrenzen lassen, welches sich entsprechend den unimodularen ganzzahligen Substitutionen der ursprünglichen Veränderlichen gleichfalls in charakteristischer Weise in Parzellen zerlegt. Man kann geradezu sagen, dass ein grosser Theil der Zahlentheorie in dem Studium der Raumeinteilungen besteht oder bestehen sollte, welche irgend welchen discontinuirlichen Transformationsgruppen entsprechen. Hierzu bieten die folgenden Erläuterungen über Formen mit $D=0$ und $D>0$ noch wesentliche Gesichtspunkte.

3. Die Formen mit $D=0$ und die Punkte auf dem Kegelschnitt.

Wir gehen nunmehr auf den Rand unseres Kegelschnitts, indem wir

die Betrachtung der zerfallenden quadratischen Formen von der Discriminante $D = 0$ beginnen.

Man stellt sich das Aequivalenzproblem wesentlich einfacher. Was zunächst die rationalen Punkte betrifft, so wissen wir von vorneherein, dass irgend zwei Punkte mit rationalem Parameter ω und ω' unter sich allemal aequivalent sind. Handelt es sich dagegen um zwei irrationale Punkte, so haben wir nach dem Früheren ω und ω' in einen Kettenbruch zu entwickeln. Die Punkte sind dann und nur dann aequivalent, wenn die zugehörigen Kettenbrüche von einer gewissen Stelle ab lauter gleiche Teilnenner zu aufweisen.

Das geometrische Gegenbild der Kettenbruchentwickelung auf der Peripherie unseres Kreises ist uns von pg. 202 her bekannt. Dieselbe bedeutet die successive Construction von Elementarsehnen erster Art, welche von den Punkten 0 und ∞ beginnend je zwei

Näherungspunkte der Kettenbruchentwikkelung verbinden. Dabei gehen von dem Näherungspunkte $\frac{p_{r-1}}{q_{r-1}}$ μ_r Elementarsehnen aus, welche nach den $\mu_r - 1$ folgenden Näherungspunkten und dem $(r+1)^{ten}$ Hauptnäherungspunkte führen. Wir haben in dieser Weise die Kettenbruchentwikkelung allerdings nur für ein rationales ω gedeutet. Für ein irrationales ω bleibt die Sache aber gerade so, mit dem einzigen Unterschiede, dass wir hierbei den Punkt ω niemals mit einer Sehne wirklich erreichen, sondern ihm nur mehr und mehr nahe kommen. Die so entstehende Figur hat in der Hauptsache die Gestalt einer nicht abbrechenden Zickzack-Linie, welche je die Hauptnäherungspunkte der Kettenbruchentwickelung verbindet. In den Ecken der Zickzacklinie laufen noch je $\mu_r - 1$ Geraden fächerförmig zusammen. Messen wir die Grösse der Eckenwinckel etwa durch die Anzahl dieser Geraden, so können wir die Bedingung

für die Aequivalenz zweier irrationaler Punkte ω und ω' so formuliren: Es müssen in den zugehörigen Zickzack hinein von einer gewissen Stelle ab die Ecken gleich gross werden. Die rationalen Punkte bilden zusammen eine Klasse aequivalenter Punkte. Dieselben liegen, wie aus der Construction der rationalen Scala hervorgeht, auf dem Kegelschnitte überall dicht. Dasselbe gilt auch von jeder Klasse irrationaler ω. Wir behaupten nämlich: *In jedem beliebig klein gegebenen Stücke der Kreisperipherie liegen immer Punkte, welche zu einem gegebenen ω aequivalent sind.* In der That liegen in dem gegebenen Stücke sicher zwei Punkte, welche Endpunkte einer Elementarsehne erster

Art sind. In dieser Elementarsehne können wir von der Sehne $0\,\infty$ ausgehend durch eine Zickzack-Linie hingelangen. Setzen wir von da aus die Linie nach dem durch die Kettenbruchentwickelung von ω angezeigten Schema fort, indem wir die Grösse der folgenden Ecken nach den Teilnennern μ_ν von ω bestimmen, so nähern wir uns hierdurch einem Punkte ω', welcher mit ω aequivalent ist und welcher unserer Construction zufolge innerhalb des vorgegebenen Stückes der Kreisperipherie liegt. Hiermit ist gezeigt, daß auch die Punkte der sämtlichen irrationalen Klassen von ω-Werten auf dem Kegelschnitte überall dicht liegen.

In diesem Gewirr von aequivalenten Punkten kann sich die geometrische Anschauung nicht mehr zurecht finden, nur die arithmetische Behandlung wird hier die Frage der Aequivalenz entscheiden können. Die Dinge liegen also auf dem Rande des fundamentalen Kegelschnittes

gerade umgekehrt, wie im Innern. Während dort die arithmetischen Verhältnisse im geometrischen Bilde sehr übersichtlich wurden, versagt hier die geometrische Anschauung völlig – ein Beispiel dafür, wie sich der geometrische und der arithmetische Standpunkt wechselweise ablösen müssen. Vielleicht kann man sagen: die geometrische Auffassung ergiebt überall da aber auch nur da Erleichterungen, wo es sich um arithmetische <u>Ungleichungen</u> handelt.

Wir knüpfen hieran eine Bemerkung, welche für die Auffassung der Gruppeneigenschaft von principieller Bedeutung ist. Wie wir sahen, hat auf dem Rande des Kegelschnittes unsere Gruppe der $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ Substitutionen nirgends einen Bereich, in dem sie discontinuirlich ist. Beachtet man nur dieses, so möchte man unsere Gruppe für continuirlich halten. Das ist sie aber keineswegs, denn im Innern des Kegel-

schnittes besitzt sie ihre wohl abgegrenzten Fundamentalbereiche. Um diese Verhältnisse kurz bezeichnen zu können, werden wir sagen: Unsere Gruppe ist im Innern des Kegelschnitts eigentlich -, auf dem Rande uneigentlich - discontinuirlich, womit aber nichts über die Gruppe als solche, sondern nur etwas über ihr Verhalten in diesem Gebiete ausgesagt sein soll. Die Gruppe als solche ist discontinuirlich schlechtweg.

4. Die indefiniten Formen mit $D > 0$ und die Punkte ausserhalb des Kegelschnittes.

Es bleiben die indefiniten Formen mit $D > 0$ zu behandeln, denen das Aeussere des Kegelschnittes zukommt. Wir fragen auch hier zunächst nach dem reducirten Raume. Die Definition der reducirten Formen (A, B, C) war diese: $A > 0$, $C < 0$. Des genaueren teilten wir die reducirten Formen in folgende Un-

terabteilungen ein

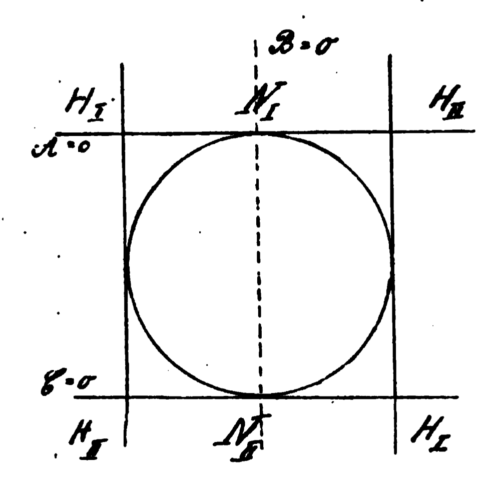
Hauptreduc.	I. Art.	$A+B+C<0,$	$A-B+C>0.$
"	II. Art.	$>0,$	$<0.$
Nebenreduc.	I. Art.	$<0,$	<0
"	II. Art	$>0,$	>0

Wurzeln λ von $A\lambda^2+B\lambda+C=0$:

Wir bemerken, dass die hiermit gegebene Definition der reducirten Formen einigermassen im Widerspruch steht mit unserer geometrischen Darstellung, in welcher nur die Verhältnisse $A:B:C$ zum Ausdruck kommen, während es in den vorstehenden Ungleichungen auf die absoluten Werte der A, B, C ankommt. Wir characterisiren die reducirten Formen daher lieber durch die (jetzt natürlich reellen) Wurzeln, welche sich beim

Nullsetzen der Form ergeben, sagen wir durch die Wurzeln λ_1, λ_2 der Gleichung $A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$. Durch die relative Lage dieser Wurzeln gegenüber den Werten $-1, 0, +1$ sind, wie früher hervorgehoben, unsere Unterabteilungen gleichfalls unterschieden. Diese Lage ist in dem obigen Schema pag 245 dargestellt. Da λ_1, λ_2 die Parameter der Punkte bedeuten, in welchen die Tangenten vom Punkte A, B, C den Kreis berühren, so kann man daraufhin die resp. Gebiete für unsere 4 Arten reducirter Formen bestimmen. Zunächst ist klar, dass reducirte Formen überhaupt oberhalb der oberen und unterhalb der unteren horizontalen Tangente des Kreises gelegen sind. Im Uebrigen beschreibt sich die Verteilung der reducirten Formen am Einfachsten, wenn man das von den horizontalen und verticalen Tangenten begrenzte vollständige Viersei~~t~~ betrachtet. Dasselbe teilt die Ebene in 4 Dreiecke und 3 Vierecke. Von diesen werden

2 Vierecke durch die Hauptredu-cirten erster und zweiter Art, zwei Dreiecke durch die Nebenredu-cirten erster und zweiter Art angenommen, wie in der Figur näher angegeben ist.



Hier fällt zunächst in's Auge, daß das Gebiet der reducirten Formen gewissermassen einen viel grösseren Teil des Gesamtgebietes der indefiniten Formen einnimmt, als das reducirte Gebiet im Falle der definiten Formen that. Dafür gilt in dem jetzigen reducirten Bereiche nicht mehr der Satz, daß keine zwei Punkte derselben unter sich aequivalent sind, vielmehr gehört zu jeder reducirten Form noch eine unendliche Kette aequi-

valenter reducirter Formen hinzu, eine Kette, welche sich nur im Falle commensurabler A, B, C mit einer endlichen Gliederzahl (der Gliederzahl in der Periode der reducirten Formen) schliesst.

Unsere erste Aufgabe wird nun sein, die zu einem reducirten Punkte unserer Figur (oder auch die zu irgendwelchem Punkte) gehörige Kette durch geometrische Construction zu ermitteln. Dabei stützen wir uns auf einen wichtigen Gedanken, welcher von Hermite zuerst algebraisch ausgesprochen ist (in Crelle Bd. 41, 1851) und der später in's Geometrische übersetzt worden ist (vergl. Modulfunctionen Bd I pg. 256, ferner die wiederholt genannte Abhandlung von Hurwitz in Math. Annal. Bd. 45). Hermite geht davon aus, dass die Reduction der definiten Formen bekannt ist; er spielt nun die Aufgabe für die indefiniten Formen in das Gebiet der definiten Formen hinüber, indem er jeder indefiniten Form

<u>definite Formen in geeigneter Weise covariant zuordnet, d. h. in solcher Weise das die Beziehung zwischen der gegebenen Form und den zugeordneten durch die Substitutionen $\binom{\alpha\ \beta}{\gamma\ \delta}$ nicht gestört wird.</u>

Do. d. 30. I. 96. Um diese covariante Beziehung naturgemäss zu entwickeln, bemerken wir, dass die einzelne quadratische Form $f = (a, b, c)$ als einzige Invariante ihre Discriminante $b^2 - 4ac$ besitzt, welche bei Substitutionen von der Determinante ± 1 völlig ungeändert bleibt. Handelt es sich darum eine invariante Beziehung zwischen 2 quadratischen Formen $f = (a, b, c)$ und $f' = (a', b', c')$, also eine <u>simultane Invariante</u> der beiden Formen aufzustellen, so betrachten wir das Büschel der Formen $f + \lambda f'$. Bilden wir die Discriminante einer beliebigen Form des Büschels:

$$(b + \lambda b')^2 - 4(a + \lambda a')(c + \lambda c'),$$

so muss dieselbe invarianter Natur

sein, u. zw. bei beliebigen Werten von λ. Es müssen also auch die Coefficienten der nach λ geordneten Discriminante

$$(b^2-4ac)+2\lambda(bb'-2ac'-2a'c)+\lambda^2(b'^2-4a'c')$$

Invarianten werden. Der Coefficient von 1 und λ^2 liefert nichts Neues, der Coefficient von 2λ aber giebt die gemachte simultane Invariante der Formen f und f', nämlich

$$bb'-2ac'-2a'c.$$

<u>Es sei nun (a', b', c') die gegebene indefinite Form. Wir ordnen ihr diejenigen definiten Formen (a, b, c) zu, welche mit ihr eine verschwindende simultane Invariante haben.</u> Wir sind dann sicher, dass, bei einer Transformation der Form (a', b', c') mittelst einer $\binom{\alpha\ \beta}{\gamma\ \delta}$ Substitution, der transformirten indefiniten Form in demselben Sinne diejenigen definiten Formen entsprechen, welche durch jene Transformation aus den Formen

(a, b, c) hervorgehen.

Geometrisch bedeutet diese Zuordnung nichts anderes, als den Uebergang von dem Pole (a'b'c') zu seiner Polaren, oder genauer gesagt zu seiner „Polarsehne" indem nämlich von der Polaren nur dasjenige Stück betrachtet wird, welches definite Formen trägt, welches also im Innern des fundamentalen Kegelschnitts enthalten ist. Hiermit zeigt sich denn auch, dass es wirklich definite Formen der gewollten Art gibt. Die obige algebraische Definition hat jedoch vor der geometrischen, den Vorzug voraus, dass sie die Verallgemeinerungsfähigkeit des Ansatzes auf höhere Fälle besser hervortreten lässt.

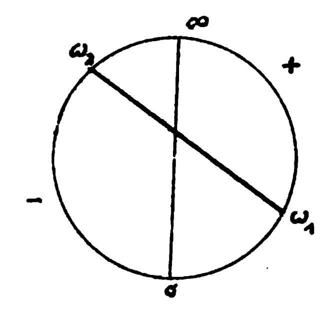
a', b', c'

Durch das Hermite'sche Princip wird in die Zahlentheorie ein Begriff

eingeführt, der ihr sonst fremd ist, nämlich der Begriff der stetigen Zahlenreihe. Statt des einzelnen Zahlentripels (a', b', c') wird eine stetige Folge von Zahlen (a, b, c), statt des einzelnen Punktes ein geometrischer Ort von Punkten substituirt. In diesem Sinne überschrieb *Hermite* seine oben genannte Arbeit: *Introduction des variables continues dans la théorie des nombres.*

Wir haben jetzt unsere früheren Resultate hinsichtlich der Reduction der indefiniten Formen in die Vorstellungen des neuen geometrischen Bildes zu übersetzen. Wir fragen zunächst: *Wie liegen die Polarsehnen, welche zu den reducirten Formen gehören?* Die Bedingung für die reducirten Formen hiess $A > 0$, $C < 0$. Nun ergiebt $A\omega^2 + B\omega + C$ gleich Null gesetzt die Berührungspunkte ω_1, ω_2 der Tangenten vom Punkte $A : B : C$ und gleichzeitig die Endpunkte der Polarsehne. Die Punkte ω_1, ω_2 zerlegen die Kreisperipherie in 2 Teile,

In einem derselben ist $Aw^2 + Bw + C$ positiv, im anderen negativ. Wir bemerken, dass durch die Lage der Polarsehne über das Vorzeichen von $Aw^2 + Bw + C$ noch nichts ausgesagt wird. Unser geometrisches Bild ist aus diesem Grunde noch unvollständig, und zwar gerade in einer Hinsicht, die für die Reductionstheorie wesentlich ist. Wir können unser geometrisches Bild

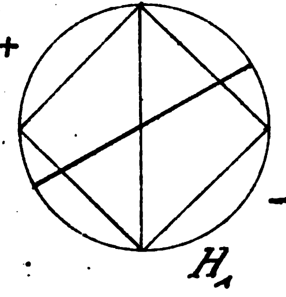


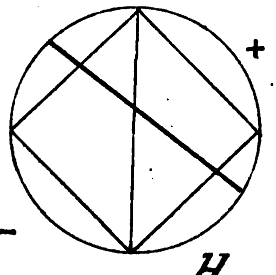
aber leicht vervollständigen, indem wir dem einen Abschnitte der Kreisperipherie, in welchem $Aw^2 + Bw + C > 0$ ist, das Zeichen +, dem andern das Zeichen − hinzusetzen, wie beistehend geschehen. Alsdann zeigt unsere Figur nicht nur die Lage des Punktes $A : B : C$, sondern auch das Vorzeichen von A und C an. Es wird beispielsweise $C < 0$ sein, wenn der Punkt $w = 0$ in dem negativen Segmente der Kreisperipherie liegt; denn für $w = 0$ reducirt sich $Aw^2 + Bw + C$

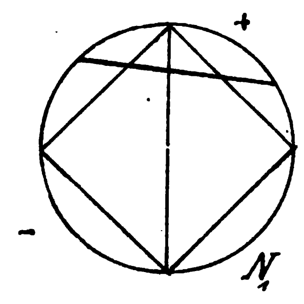
auf $\mathfrak{C}$. Es wird ferner $\mathfrak{A} > 0$ sein, wenn der Punkt $\omega = \infty$ in dem positiven Segmente enthalten ist; denn für $\omega = \infty$ stimmt das Vorzeichen von $\mathfrak{A}\omega^2 + \mathfrak{B}\omega + \mathfrak{C}$ mit dem von $\mathfrak{A}$ überein. Berücksichtigen wir dieses, so lautet die Bedingung des Reducirtseins als Eigenschaft der Polarsehne ausgesprochen folgendermassen: Es muss der Punkt ∞ im positiven, der Punkt 0 im negativen Segmente liegen. Daraus folgt, dass die zu einer reducirten Form gehörige Polarsehne jedenfalls die Mittellinie $(0\ \infty)$ unserer Figur schneiden wird.

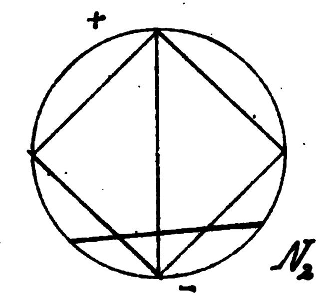
Im Uebrigen unterscheiden wir noch Haupt- und Nebenreducirte und Reducirte erster und zweiter Art. In der Figur kommt dieses darauf hinaus, dass wir die Polarsehnen je nach ihrer Lage gegen gewisse Elementarsehnen charakterisiren. Betrachten wir nämlich die Tabelle von pg. 245, so beruht die Einteilung der Reducirten auf dem Vorzeichen von $\mathfrak{A} \pm \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$, also auf dem Vorzeichen des Ausdrucks

$A\omega^2 + B\omega + C$ für $\omega = +1$ und $\omega = -1$. Geometrisch gesprochen kommt es also darauf an, ob die Punkte $+1$ und -1 der Kreispherie im positiven oder negativen Segmente liegen. Wir verbinden diese Punkte mit 0 und ∞ und erhalten ein dem Kreise eingeschriebenes Quadrat. Im Anschluss an dieses lässt sich der Unterschied zwischen Haupt- und Nebenreducirten einfach so aussprechen: *Die Polarsehnen von Hauptreducirten treffen das Quadrat in zwei gegenüberliegenden Seiten, die Polarsehnen von Nebenreducirten in zwei bei 0 oder ∞ zusammenstossenden Seiten.* Die vollständige Unterscheidung ergiebt sich aus den folgenden Figuren, deren Richtigkeit ein Vergleich mit der Tabelle von pg. 245 lehrt:



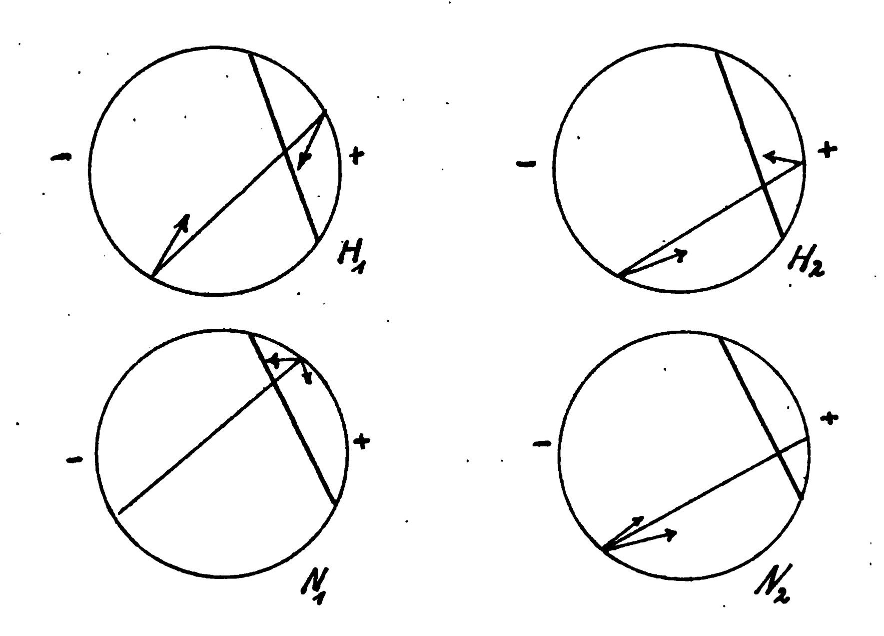






Weiter untersuchen wir die Lage einer (nicht notwendig reducirten) Polarsehne gegen die Gesamtheit der Elementarsehnen erster Art. Wir greifen zunächst irgend eine Elementarsehne heraus, welche von unserer Polaren geschnitten wird. An diese Elementarsehne legen sich nach der einen und anderen Seite hin je ein Constructionsdreieck an, dessen beide weitere Seiten wieder von Elementarsehnen gebildet werden. Von diesen beiden Seiten der benachbarten Constructionsdreiecke wird je eine durch unsere Polarsehne geschnitten. Wir markiren diese Seite im einen und anderen Dreiecke und nennen sie die zu der ersten Elementarsehne benachbarten

Sehnen. Jede Elementarsehne hat in diesem Sinne einen rechten und einen linken Nachbar. Nach der Lage dieser Nachbarn gegen die ursprüngliche Elementarsehne unterscheiden wir 4 Fälle, die wir im Folgenden schematisch verzeichnen:



War unsere Polarsehne nicht reducirt, so ist es jetzt leicht eine Transformation anzugeben, die sie zu einer reducirten macht. Unsere erste Elementarsehne hat zu Endpunkten gewis=

se rationale Punkte der Kreisperipherie, welche $\frac{\alpha}{\gamma}$ und $\frac{\beta}{\delta}$ heissen mögen, u. zw. sei $\frac{\alpha}{\gamma}$ derjenige Endpunkt, welcher im positiven Segmente befindlich ist. Wir nehmen dabei die Vorzeichen so, dass $(\alpha\delta - \beta\gamma) = +1$ wird. Nun verwandelt die Substitution $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ diese Elementarsehne in die Mittellinie der Figur u. zw., so dass ihr positives Ende in den Punkt ∞ übergeht. Gleichzeitig verwandelt sie die dritten Ecken der anstossenden Dreiecke in die Punkte $+1$ und -1. Unsere Transformation bringt also unsere Polarsehne in eine Lage, in welcher sie die Mittellinie schneidet, in welcher sie also eine reducirte Sehne ist. U. zw. entstehen aus unseren vier letzten Figuren bei der Transformation vier Figuren, welche hinsichtlich der Lage der Polarsehne gegen das Sehnenviereck $\infty, +1, 0, +1$ mit den vier vorletzten Figuren identisch sind. Es liefern also unsere vier Figuren bei der gedachten Transformation bez. eine Hauptreducirte

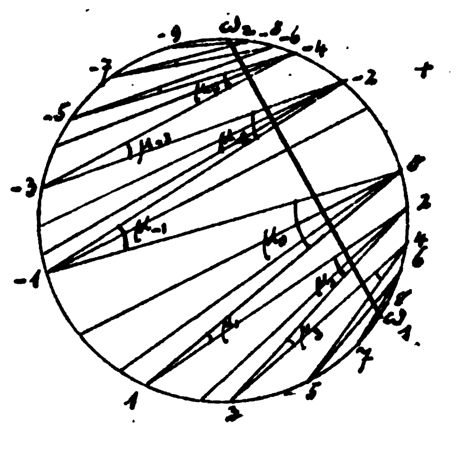
erster oder zweiten Art etc., wie durch die beigefügten Zeichen H_1, H_2, N_1, N_2 angedeutet ist.

In derselben Weise, wie wir soeben zu einer ersten Elementarsehne nach rechts und links einen Nachbar hinzuconstruirt haben, können wir diesen letzteren je einen weiteren Nachbar zugesellen. So fortfahrend bekommen wir eine ganze Kette von Elementarsehnen, durch welche unsere Polarsehne hindurchzieht. Die Kette wird nur dann eine endliche sein, wenn die Polarsehne in rationalen Punkten endigt, im anderen Falle wird sie beiderseits unbegrenzt sein.

Wir unterscheiden in unserer Sehnenkette noch Hauptsehnen und Nebensehnen. Die Hauptsehnen sind durch die Figuren H_1 und H_2, die Nebensehnen durch die Figuren N_1 und N_2 von pg. 257 characterisirt. Die Hauptsehnen bilden für sich eine Zickzacklinie, welche die beiden Endpunkte ω_1 und ω_2 der Polar-

sehne asymptotisch einschliessen. Von den einzelnen Ecken dieser Zickzacklinie strahlen eventuell eine Anzahl von Nebensehnen (sagen wir $(n-1)$ Nebensehnen) aus. Die Ecken der Zickzacklinie bezeichnen wir, von einer beliebigen Ecke beginnend, mit $(0)(1),(2)\ldots(-1),(-2),\ldots$ Die zu den bez. Ecken gehörigen Zahlen $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_{-1}\ldots$ betrachten wir als ein Maass für die Grösse des Eckenwinkels.

Jede dieser Elementarsehnen gibt uns eine Transformation an die Hand, durch welche wir unsere Polarsehne zu einer reducirten machen



können. Der Aufeinanderfolge dieser Elementarsehnen läuft daher eine Aufeinanderfolge von reducirten Formen parallel. Wir behaupten

nun: Diese Aufeinanderfolge reducirter Formen ist mit der früher betrachteten Kette reducirter Formen direct identisch. Wir erhalten also die frühere Kette, indem wir der Reihe nach alle Sehnen unserer Sehnenkette derart in die Mittellinie transformiren, dass immer das positive Sehnenende nach $\omega = \infty$ fällt.

Frei. d. 31. I. 96. Der Beweis dieses Satzes lässt sich direct von unserer Figur aus führen. (Vergl. hierzu Hurwitz in der mehrfach genannten Arbeit, Math. Ann. Bd. 45). Wir ziehen es aber vor, auf unsere frühere Gitterfigur zu recurrieren, um so den Zusammenhang zwischen dem jetzigen und dem damaligen geometrischen Bilde herzustellen.

Die reducirten Formen, welche wir nach unserer jetzigen Methode erhalten, sind den Elementarsehnen der Zickzacklinie eindeutig zugeordnet. Jede Elementarsehne können wir dabei ersetzen durch ihre Endpunkte, d. h. durch ein Paar rationaler Punkte,

wobei der eine Punkt des Paares auf dem positiven, der andere auf dem negativen Segmente der Kreisperipherie gelegen ist.

Wir erinnern uns nun an die beiden „natürlichen Umriß'polygone" der früheren Gitterfigur, denen eines im positiven Quadraten, das andere im nebenliegenden negativen Quadraten lag. Die Ecken des ersten Polygons wurden mit den geraden, die Ecken des anderen mit den ungeraden Indices bezeichnet, und nun wurden die reducirten Formen dadurch gewonnen, dass man jedesmal eine Ecke des einen Polygons mit der darauf folgenden Ecke des anderen Polygons zusammennahm. Können wir nun zeigen, dass jene Punkte der Kreisperipherie und diese Eckpunkte der natürlichen Umrisspolygone gegenseitig eindeutig zusammengehören, so wird dadurch gleichzeitig bewiesen, dass auch die reducirten Formen, welche wir durch die eine oder

andere Methode erhalten können, dieselben sind.

Zunächst führen wir für die rationalen Parameterwerte der Zickzack-Ecken eine passende Bezeichnung ein. Es heisse der zur Ecke (r) gehörige Parameter $\frac{p_r}{q_r}$ (wobei wir die p_r, q_r als teilerfremde ganze Zahlen voraussetzen). Alsdann haben wir etwa auf dem positiven Kreissegmente die Eckpunkte

$$\ldots \frac{p_{-2}}{q_{-2}}, \frac{p_0}{q_0}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots$$

mit den zugehörigen Winkelgrössen

$$\mu_{-2}, \mu_0, \mu_2, \ldots$$

Ebenso liegen auf dem negativen Kreissegmente die Punkte

$$\ldots \frac{p_{-1}}{q_{-1}}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_3}{q_3}, \ldots$$

mit den zugehörigen Winkeln

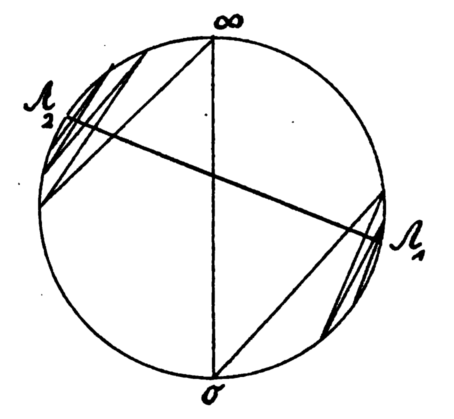
$$\ldots \mu_{-1}, \mu_1, \mu_3, \ldots$$

Zwischen diese Zahlen ordnen sich noch die zu den freien Enden der Nebensehnen gehörigen Parameter-

werte ein.

Andrerseits bezeichnen wir die Coordinaten x und y der Ecken unserer zur Form $f(x\,y)$ gehörigen natürlichen Umrisspolygone mit (p_r, q_r). Wir behaupten nun, dass die Zahlen p_r und q_r in beiden Fällen dieselben sind. Die Richtigkeit dieser Behauptung ergibt sich aus dem Zusammenhang unserer beiderlei Figuren mit gewissen Kettenbruchentwickelungen.

Was zunächst die Kreisfigur betrifft, so transformiren wir in dieser die Sehne mit den Endpuncten $\frac{p-1}{q-1}$ und $\frac{p_0}{q_0}$ auf die bekannte Art und Weise in die Mittellinie der Figur, wobei die Polarsehne in die Polare einer reducirten Form F verwandelt wird.



Die transformirte Zickzacklinie sondern wir in zwei Hälften, welche beide von der Mittellinie ausgehend nach rechts und

links hin auf die Wurzeln Λ_1, Λ_2 von $F=0$ zustreben. Von solchen Teilzickzacklinien lernten wir auf pg. 241, dass sie genau die Kettenentwickelungen derjenigen Kreispunkte wiedergeben, auf welche sie zustreben, wobei ihre Ecken die Näherungsbrüche, ihre Winkel die Teilnenner des Kettenbruches liefern. Daraus folgt, dass die Zahlen $\frac{p_r}{q_r}$ bei positivem Index die Näherungsbrüche von Λ_1, bei negativem die von Λ_2 darstellen.

Andrerseits betrachten wir die natürlichen Umrisspolygone in der Gitterfigur. Führen wir ein reducirtes x, y-Coordinatensystem ein, so zerschneiden seine Axen die natürlichen Umrisspolygone gleichfalls in zwei Hälften, welche sich bez. den Nullstrahlen $\frac{x}{y} = \Lambda_1$,

oder $\frac{x}{y} = \Lambda_2$ der zu dem benutzten Coordinatensystem gehörigen reducirten Form F anschmiegen. Die auf solche Weise entstehenden Teilpolygonzüge stellen aber ihrerseits nach Früherem die Kettenbruchentwickelung von Λ_1 bez. von Λ_2 dar, wobei jetzt die Polygonecken die Coordinaten $x = p_r$, $y = q_r$ erhalten. Wir dürfen dabei ersichtlich annehmen, dass die Wurzeln Λ_1, Λ_2, die wir jetzt betrachten, dieselben sind, wie vorher bei der Kettenbruchentwickelung auf der Kreisperipherie. Da nämlich unsere Umrisspolygone sämtliche reducirten Formen liefern, so muss es möglich sein, das Coordinatensystem so zu legen, dass gerade die vorher benutzte reducirte Form F sich ergibt. <u>Mithin haben die Eckpunkte der Umrisspolygone dieselben Grössen p_r, q_r, zu Gittercoordinaten, welche vorher in den Parameterwerten der Zickzackecken auftraten.</u>

Nach den Bemerkungen zu Bö-

gim dieses Beweises folgt dann weiter, dass in der That unsere beiden Figuren hinsichtlich der Reduction der indefiniten Formen dasselbe leisten. Der innere geometrische Zusammenhang dieser beiden so verschiedenen Figuren ist jedenfalls ein sehr merkwürdiger. Wir bemerken noch, dass die freien Ecken der $(\mu-1)$ Nebensehnen, welche von einem Eckpunkte unserer Zickzacklinie auslaufen, ihrerseits die Parameterwerte $\omega = \frac{p}{q}$ aufweisen, welche den Coordinaten p, q der $\mu-1$ Nebenpunkte entsprechen, welche die correspondirende Seite des einen Umrisspolygons im Gitter trägt.

Es wird nun darauf ankommen, aus der neuen Figur neue zahlentheoretische Resultate abzuleiten. Wir nehmen zunächst die Frage nach den <u>Automorphien</u> einer Form f noch einmal auf. Wir wollen jetzt 4 Arten von Automorphien unterscheiden, welche durch

was folgende Schema charakterisirt sind:

1. $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$, $\omega_1 \sim \omega_1$, $\omega_2 \sim \omega_2$

2. $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$, $\omega_1 \sim \omega_2$, $\omega_2 \sim \omega_1$

3. $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$, $\omega_1 \sim \omega_2$, $\omega_2 \sim \omega_1$

4. $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$, $\omega_1 \sim \omega_1$, $\omega_2 \sim \omega_2$

Im Falle 2. und 3. werden hiernach die Wurzelpuncte von $f=0$ auf dem Kreise vertauscht, im Falle 1. und 4. bleiben sie fest. Im Falle 1. und 2. handelt es sich um eine Substitution, welche den positiven Sinn, in welchem wir uns die Kegelschnittperipherie durchlaufen denken mögen, ungeändert lässt, im Falle 3. und 4. um eine Substitution, welche diesen Sinn umkehrt.

Der Fall 1. ist früher ausführlich untersucht worden. Der Determinante +1 und dem Festbleiben der Wurzelpunkte entsprechend wird dabei das positive Segment unseres Kegelschnitts in das positive, das negative in das negative übergeführt. Dieser Fall führt auf die

<u>gewöhnliche Theorie der Pell'schen Gleichung $t^2 - Du^2 = 4$.</u>

Im Falle 2. wird die Kreisperipherie in sich verschoben, so dass ω_1 nach ω_2 und ω_2 nach ω_1 gelangt. Da (wegen der Substitutionsdeterminante $+1$) die Reihenfolge der einzelnen Teile der Kreisperipherie nicht geändert wird, so gelangt hierbei das positive Segment an den Platz des negativen und das negative an den des positiven; es geht f in $-f$ über. Der zweite Fall tritt hiernach dann ein, wenn eine Form ihrer entgegengesetzten eigentlich aequivalent ist. Die Form heisst dann sich selbst „invers", vergl. pag. 161:

Der Fall 3. bedeutet eine Spiegelung an einer Elementarsehne, welche das positive und negative Segment je in 2 Abschnitte zerlegt. Bei der Spiegelung werden diese Abschnitte des positiven Segments (und ebenso die des negativen) unter sich ausgetauscht, so dass $+f$ in $+f$ übergeht. <u>In diesem</u>

Falle gehört f zu einer Anceps. Klasse.

Der Fall 4. gibt zu der „aussergewöhnlichen Pell'schen Gleichung" $t^2 - Du^2 = -4$ Anlass. Das positive und negative Segment des Kreises werden im Falle 4. gegenseitig vertauscht; f geht daher in $-f$ über.

Bei commensurabeln a, b, c sind die Automorphien 1. wie wir wissen, immer u. zw. in unendlicher Zahl vorhanden. Zugleich ist klar, dass diese Automorphien nur bei commensurabeln a, b, c eintreten, denn $f=0$ soll mit den Fixpunkten von $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ übereinstimmen. Von den 3 anderen Arten braucht im Allgemeinen keine aufzutreten. Diese letzteren bedingen sich dabei gegenseitig, in dem Sinne, dass das Eintreten von zweien derselben auch Automorphien des dritten Falles nach sich zieht. Wenn beispielsweise Automorphien des Falles 2. und 3. vorhanden sind, so erhält man durch Zusammensetzung von zwei solchen Automorphien eine Automor-

phie von der Determinante -1, welche ω_1 in ω_1 und ω_2 in ω_2 überführt, d. h. eine Automorphie des Falles 4. Aus dieser Bemerkung fliessen Sätze der folgenden Art: Wenn es in einer Ancaps-Klasse eine Form gibt, welche mit ihrer entgegengesetzten eigentlich aequivalent ist, so besitzt die aussergewöhnliche Pell'sche Gleichung Lösungen etc. Fall 4. ist wieder durchaus daran gebunden, dass die Coefficienten a, b, c der vorgelegten Form commensurabel sind.

Do. d. 6. II. 96. Wir fragen nun nach der geometrischen Bedeutung dieser 4 Arten von Automorphien. Zum vollen Verständnis dessen müssen wir uns eine Begriffsbildung aneignen, welche von Cayley herrührt, die Cayley'sche Maassbestimmung. Dieselbe hängt auf's Innigste mit unserer Dreiecksfigur und allen jenen höheren Figuren zusammen, welche sich beim Studium von Gruppen linearer Substitutionen in der Theorie der automorphen

Functionen darbieten. Leider können wir hierauf nicht mehr so ausführlich eingehen, als es der Wichtigkeit der Sache angemessen wäre.

Wir haben schon im ersten Teil dieser Vorlesung bei den Gitterbetrachtungen eine Pseudometrik eingeführt. Damals genügte es uns, statt der imaginären Kreispunkte zwei andere (reelle oder imaginäre) Punkte der unendlich fernen Geraden zu substituiren und diese einer Maassbestimmung zu Grunde zu legen. Jetzt gehen wir mit Cayley einen Schritt weiter. Wir fassen nämlich die beiden Kreispunkte zusammen mit der doppelt zählenden Verbindungslinie, d. i. der unendlich weiten Geraden, als einen ausgearteten Kegelschnitt auf und ersetzen ihn durch einen nichtausgearteten. In unserem Falle wählen wir als solchen unseren fundamentalen Kegelschnitt $\mathfrak{D} = 0$. Die Cayley'sche Maassbestimmung steht nun zu diesem Kegelschnitt in einer ganz ähnlichen

Beziehung, wie die gewöhnliche Maass-bestimmung zu dem Paar der imaginären Kreispunkte. Um zunächst den <u>Winkel zweier Geraden</u> zu definiren, ziehen wir von ihrem Schnittpunkte aus die Tangenten an den fundamentalen Kegelschnitt und berechnen das Doppelverhältnis (D) jener Geraden mit diesen Tangenten. Alsdann bezeichnen wir als Winkel (ω) jener beiden Geraden die Grösse

$$W = \frac{i}{2} \lg D$$

Dualistisch genau entsprechend definiren wir die <u>Entfernung zweier Punkte</u>, indem wir zu den gegebenen Punkten die Schnittpunkte ihrer Verbindungslinie mit dem fundamentalen Kegelschnitt hinzunehmen und das Doppelverhältnis (D') dieser 4 Punkte bilden. Alsdann bezeichnen wir als Entfernung (E) der gegebenen Punkte

$$E = \frac{i}{2} \lg D'.$$

Dieses die einfachen Grundzüge jener Theorie. Ich muss es Ihnen überlassen, sich in dieselbe soweit einzuleben,

daß Sie Sich womöglich in einer mit
Cayley'scher Maassbestimmung ausge-
statteten Ebene gleich leicht, wie in der
gewöhnlichen, zurecht finden.

Hier interessiren uns vornehmlich die
Substitutionen $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$, welche uns gewisse
Collineationen der Ebene lieferten. Da
dieselben unseren fundamentalen
Kegelschnitt in sich überführen, so
lassen sie auch die Maassverhältnis-
se der Figuren völlig ungeändert.
Zwei Geraden bilden also nach der
Collineation denselben Winkel, wie
vor derselben, zwei Punkte haben
vor und nach der Collineation die-
selbe Entfernung. Wir unterscheiden
dabei zwischen den Substitutionen
von der Determinante +1 und denen
von der Determinante −1. Bei den
ersteren bleibt auch der Sinn, in dem
die Punkte des Kegelschnitts auf
einander folgen, ungeändert, bei
den letzteren wird er umgekehrt.
Irgend eine Figur der Ebene geht
daher bei den Substitutionen

$\alpha\delta - \beta\gamma = +1$ in eine direct congruente, bei den Substitutionen $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$ in eine invers congruente über. Wir bezeichnen die ersteren als Bewegungen, die letzteren als Umlegungen der Ebene. Wir würden die Gesammtheit dieser Bewegungen und Umlegungen erhalten, wenn wir die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ als continuirliche Parameter ansehen wollten; nun sie aber nur ganzzahlige Werte annehmen können haben wir eine in dieser Gesammtheit enthaltene discontinuirliche Untergruppe vor uns.

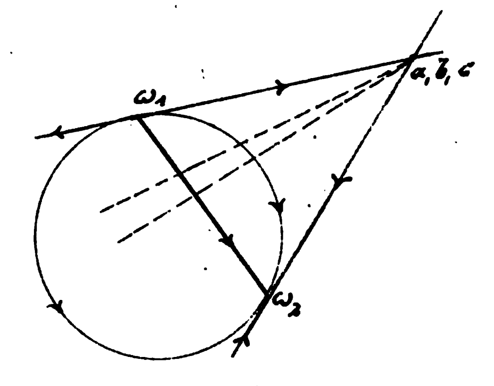
Bei allen Bewegungen und Umlegungen dieser Untergruppe geht unsere Figur in sich über und zwar geht bei der Gesammtheit unserer Bewegungen jedes schraffirte Dreieck in jedes schraffirte, bei der Gesammtheit der Umlegungen jedes schraffirte in jedes nicht-schraffirte Dreieck über. Jedes schraffirte Dreieck ist also im Sinne der Cayley'schen Maassgeometrie mit

<u>jedem schraffirten direct, mit jedem nicht-schraffirten invers congruent.</u> Durch diese Formulirung wird die Symmetrie unserer Figur viel schärfer gekennzeichnet, als es ohne dieselbe möglich war. Unsere Figur ist in der Cayley'schen Maassbestimmung eine reguläre Gebietseinteilung, ebenso gut wie es etwa ein Schachbrett in der gewöhnlichen Maassbestimmung ist. Insbesondere haben alle Dreiecke unserer Figur die gleichen Winkel, nämlich 60°, 90° und da, wo sie an die Peripherie des Kegelschnitts heranragen, 0°.

Wir kommen nun speciell auf die geometrische Bedeutung der Automorphien zurück, wobei wir die pg 268 unterschieden Fälle einzeln betrachten. Die Automorphien des Falles 1. und 2. sind Bewegungen, die des Falles 3. und 4. Umlegungen, bei denen ein vorgegebener Punkt (a, b, c) festbleibt. Die Automorphien des Falles 1. und 2. werden wir daher als Drehungen, den Punkt a, b, c im Falle 1. als Dre-

hungscentrum anzusprechen haben.

Im Falle 1. bleiben auch die Berührungspunkte der von a, b, c an den fundamentalen Kegelschnitt gezogenen Tangenten für sich fest. Da wir somit die sämmtlichen 3 Fixpunkte der betr. Collineation (nämlich diese beiden Berührungspunkte und den Punkt a, b, c selbst) kennen, so können wir uns in der nebenstehenden Zeichnung ein Bild von der durch sie bewirkten Umformung machen. Nach den Elementen der projectiven Geometrie bildet jede Gerade



durch den Punkt a, b, c mit den beiden festen Tangenten und der durch die Collineation aus ihr hervorgehenden Geraden ein Doppelverhältnis, welches unabhängig von der Aus-

wahl der Geraden ist. Im Sinne der Cayley'schen Maassbestimmung können wir dies so ausdrücken: <u>Jede Gerade durch a, b, c wird vermöge der Collineation um einen constanten Winkel gedreht.</u>

Die Grösse dieses Winkels hängt aufs Einfachste mit dem Pell'schen Winkel zusammen. Führen wir für den Augenblick solche Dreiecks-Coordinaten x_1, x_2, x_3 ein, dass die Gleichungen der beiden Tangenten lauten $x_1 = 0$ und $x_3 = 0$, die Gleichung ihrer Berührungssehne $x_2 = 0$, so können wir unsere Collineation in der Form anschreiben:

$$\rho x_1' = \lambda x_1, \quad \rho x_2' = x_2, \quad \rho x_3' = \mu x_3.$$

Nun wird aber die Gleichung des fundamentalen Kegelschnittes folgende Gestalt haben $x_2^2 - K x_1 x_3 = 0$, wo K irgend einen Werte hat, den man durch Annahme des Einheitspunktes noch beliebig fixiren kann. Da unsere Collineation diesen Kegelschnitt in sich transformiren soll, so folgt, dass $\mu = \frac{1}{\lambda}$. Betrachten wir eine beliebi-

ge Gerade $x_1 + r x_3 = 0$ durch den Punkt a, b, c; dieselbe geht bei unserer Collineation über in $\frac{x_1}{\lambda} + r\lambda x_3 = 0$. Das Doppelverhältnis der 4 Geraden

$$x_1 + r x_3 = 0,\ x_1 + r\lambda^2 x_3 = 0,\ x_1 = 0,\ x_3 = 0$$

wird nun ersichtlich gleich λ^2, der Cayley'sche Drehungswinkel also gleich $i \lg \lambda$.

Wollen wir diesen Winkel in den Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ausdrücken, so bemerken wir, dass λ^2 derjenige Factor ist, mit welchem sich der Quotient aus den linken Seiten der Tangentengleichungen $x_1 = 0, x_3 = 0$ bei der Transformation multiplicirt. Wir haben nämlich $\frac{x_1'}{x_3'} = \lambda^2 \frac{x_1}{x_3}$. In den früheren Coordinaten lauten die Gleichungen der Tangenten $x_1 = 0$ und $x_3 = 0$ nach pag 182 folgendermassen: $A\omega_1^2 + B\omega_1 + C = 0$ und $A\omega_2^2 + B\omega_2 + C = 0$, (wo wir die laufenden Coordinaten zur Unterscheidung von den Coordinaten a, b, c des festen Poles durch grosse Buchstaben bezeichnet haben). Wir wollen hier noch die

Wurzeln Λ_1, Λ_2 der Gleichung:

$$\mathfrak{A}\Lambda^2 + \mathfrak{B}\Lambda + \mathfrak{C} = 0$$

einführen. Dann werden die Gleichungen unserer Tangenten:

$$(\Lambda_1 - \omega_1)(\Lambda_2 - \omega_1) = 0 \quad \text{bez.} \quad (\Lambda_1 - \omega_2)(\Lambda_2 - \omega_2) = 0;$$

der Ausdruck, dessen Verhalten wir bei der Pell'schen Substitution untersuchen sollen, ist daher:

$$\frac{(\Lambda_1 - \omega_1)(\Lambda_2 - \omega_1)}{(\Lambda_2 - \omega_2)(\Lambda_2 - \omega_2)}$$

Aber die Pell'schen Substitution schreibt sich in dem Parameter Λ nach pag 144 folgendermassen:

$$\frac{\Lambda - \omega_1}{\Lambda - \omega_2} = \left(\frac{t + u\sqrt{\mathfrak{D}}}{2}\right)^2 \frac{\Lambda' - \omega_1}{\Lambda' - \omega_2}.$$

Indem wir diese Formel gleichzeitig auf Λ_1 wie auf Λ_2 anwenden, erhalten wir:

$$\frac{(\Lambda_1 - \omega_1)(\Lambda_2 - \omega_1)}{(\Lambda_1 - \omega_2)(\Lambda_2 - \omega_2)} = \left(\frac{t + u\sqrt{\mathfrak{D}}}{2}\right)^4 \frac{(\Lambda_1' - \omega_1)(\Lambda_2' - \omega_1)}{(\Lambda_1' - \omega_2)(\Lambda' - \omega_2)}.$$

Der Factor, mit dem sich bei der Pell'schen Substitution der Quotient unserer Tangentengleichungen multiplicirt, ist daher

$$\lambda^2 = \left(\frac{t + u\sqrt{D}}{2}\right)^4 .$$

Mithin wird

$$i \lg \lambda = 2i \lg \frac{t + u\sqrt{D}}{2} ;$$

dieses ist aber das Doppelte derjenigen Grösse, welche pg 145 als Pell'scher Winkel definirt wurde. <u>Der Cayley'sche Winkel ist also einfach gleich dem Doppelten des Pell'schen Winkels.</u>

Die Hauptpunkte der Pell'schen Theorie aber drücken sich in der Sprache der Cayley'schen Maassbestimmung folgendermassen aus: <u>Es gibt in unserer Gruppe zu jedem rationalen Centrum a, b, c unendlich viele Drehungen; dieselben setzen sich aus einer kleinsten durch fortgesetzte Wiederholung zusammen; die zugehörigen Drehungswinkel werden berechnet, indem man die sämtlichen Wurzeln der Pell'schen Gleichung benutzt.</u>

Zum Vergleich ziehen wir noch die Automorphien der definiten Formen heran. Wir haben zwei Arten derselben zu unterscheiden, solche von der Periode 2 und solche von der Periode 3. Die ersten gehörten zu Formen, welche in den Mittelpunkten der Dreieckskanten, die letzteren zu Formen, welche in den Mittelpunkten der Dreiecksflächen ihre repräsentirenden Punkte hatten.

Auch diese Automorphien sind im Sinne unserer Maassbestimmung Drehungen. Der Drehungswinkel beträgt beziehungsweise 180° und 120°.

Wir können die Drehungsmittelpunkte der ersten Art als M_2, die der zweiten als M_3 bezeichnen. Diese Punkte liegen discontinuirlich im Innern des Kegelschnittes zerstreut. In demselben Sinne werden wir alle rationalen Punkte ausserhalb des Kegelschnittes (und ebenso die rationalen Punkte auf dem Rande desselben) als M_∞ bezeichnen können, weil sie Centren für Cayley'sche Drehungen

von unendlich hoher Periode, d. h. für aperiodische Drehungen sind. Dieselben erfüllen das Aeussere (und den Rand) des Kegelschnitts überall dicht.

Der Fall 2. der Automorphien trat ein bei einer mit sich selbst „inversen" Formenklasse. Dabei wurden die Wurzeln ω_1 und ω_2, d. h. die Enden der zum Punkte a, b, c gehörigen Polarsehne gegen einander vertauscht. Da diese Vertauschung durch eine Bewegung der Ebene geschieht, so muss auf der Sehne ein Punkt liegen, in welchem eine Collineation unserer Gruppe u. zw. eine Collineation von der Periode 2 ihren Fixpunkt hat. Die Sehne muss daher durch einen der Punkte M_2 hindurchgehen.

Um auch ein arithmetisches Kriterium für diesen Fall der Automorphien hinzuzufügen, bemerken wir, dass durch den Punkt M_2 der Polaren nothwendig eine Elementarsehne erster Art oder

Dreiecksfigur hindurchgeht. Diese Elementarsehne können wir durch eine Collineation unserer Gruppe in die Mittellinie der Figur transformiren, wobei der Punkt M_2 in den Punkt M_2 der Mittellinie, also in den Punkt mit den Coordinaten $b=0$, $a=c$ übergeht. Gleichzeitig wird dabei unsere Form (a, b, c) in eine reducirte Form (A, B, C) verwandelt, (weil ihre Polare nach der Transformation die Mittellinie im zugehörigen Punkte M_2 schneidet). Die Gleichung der Polaren des reducirten Punktes $Bb - 2Ac - 2Ca = 0$ muss hiernach erfüllt sein, wenn wir für a, b, c speciell die Coordinaten dieses

Punktes M_2 eintragen. Es muss also sein

$$A + C = 0.$$

Dieses die gesuchte arithmetische Bedingung für das Eintreten des 2ten Falles der Automorphien. Man erkennt unmittelbar, dass diese Bedingung nicht nur nothwendig, sondern auch hinreichend ist. Mithin haben wir den Satz:

Soll eine Form mit sich selbst invers (d.h. mit ihrer inversen eigentlich aequivalent) sein, so muss in der Kette der reducirten Formen eine solche Form vorhanden sein, deren erster und letzter Coefficient entgegengesetzt gleich sind.

Wir kommen zu den Fällen 3. und 4. Hier handelt es sich um Substitutionen von der Determinante −1. Wir bezeichneten unter ihnen diejenigen Operationen, bei denen eine Sehne unserer Dreiecksfigur ungeändert bleibt, als Spiegelungen

in einem übertragenen Sinne, während nur die Spiegelungen an den Durchmessern unserer Figur im Sinne der elementaren Maassbestimmung wirkliche Spiegelungen waren. Vom Standpunkte der Cayley'schen Maassbestimmung sind alle diese Operationen wirkliche Spiegelungen, d. h. Umformungen, bei denen jede gegebene Figur in eine invers congruente umgewandelt wird. Wir mögen noch die Elementarsehnen erster und zweiter Art bez. die an ihnen stattfindenden Spiegelungen als S' und S'' unterscheiden.

Im Falle 3. der Automorphien handelt es sich um eine Spiegelung, welche die Endpunkte ω_1, ω_2 der Polarsehne von (a, b, c) vertauscht, wobei die Polarsehne in sich transformirt wird. Sie muss alsdann durch das Centrum der Spiegelung hindurchgehen. Gleichzeitig geht dann die Axe der Spiegelung, welche Polare des Centrums ist, durch den Pol

unserer Sehne, d. h. durch den Punkt (a, b, c) hindurch. Die Axe der Spiegelung kann aber, da es sich um eine Operation unserer Gruppe handelt, nur eine Elementarsehne erster oder zweiter Art sein. Der Punkt (a, b, c) muss daher auf einer der Geraden S' oder S" liegen.

Um hieraus wieder ein arithmetisches Kriterium für das Eintreten des Falles 3) abzuleiten, bemerken wir, dass wir jede S' in die Mittellinie b = 0, jede S" in die Seite a = b des reducirten Dreiecks durch eine unserer Collineationen verwandeln können. Die Form (a, b, c) geht dabei in eine nothwendig reducirte Form über, für welche im einen oder andern Falle entweder B = 0 oder A = C ist. In beiden Fällen sprechen wir von einer Ancepsform. Die Automorphien des Falles 3) treten also bei den Ancepsklassen auf, d. h. dann, wenn sich in der Kette der reducirten Formen entweder eine Form befindet mit

$A = C$ oder eine solche mit $B = 0$.

Im Falle 4) endlich handelt es sich um eine Umlegung der Ebene, bei der die Wurzeln ω_1, ω_2 in der Gleichung $a\omega^2 + b\omega + c = 0$ ungeändert bleiben. Hieraus werden wir gerade so, wie auf pg. 141 Bedingungen für die Coefficienten $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ der Substitution ableiten können. Dieselben drücken sich ebenso wie dort mit Hülfe zweier ganzer Zahlen t und u aus, zwischen denen jetzt, da die Determinante der Substitution gleich -1 ist, die Gleichung besteht $t^2 - Du^2 = -4$. Diese Gleichung heisst die aussergewöhnliche Pell'sche Gleichung. Um das Vorhandensein von Automorphien des Falles 4. zu entscheiden, sind wir auf die Untersuchung dieser Gleichung angewiesen, über deren Lösungen im allgemeinen nichts ausgesagt werden kann. Wir müssen uns darauf beschränken, Tabellen zu citiren, in denen immer die kleinste Lösung dieser Gleichung ange-

geben wird (falls Lösungen überhaupt vorhanden sind) nämlich:

Legendre: Théorie des nombres Bd I Tab. X (der deutschen Ausgabe).

Cayley: Gesammelte Werke Bd. IV pg 40.

Nennen wir die betr. kleinste Lösung t_0', u_0' und bilden uns die complexe Zahl $\frac{t_0' + u_0' \sqrt{D'}}{2}$, so erhält man aus ihr die sämmtlichen Lösungen der beiden Pell'schen Gleichungen $t^2 - D'u^2 = \pm 4$, indem man
$\frac{t + u\sqrt{D'}}{2} = \left(\frac{t_0' + u_0' \sqrt{D'}}{2}\right)^\nu$ setzt und ν alle ganzen, positiven und negativen Zahlen durchlaufen lässt. Die geraden ν ergeben dabei die Lösungen $t^2 - D'u^2 = +4$, die ungeraden ν diejenigen von $t^2 - D'u^2 = -4$.

Frei. d. 7. II. Nachdem wir unsere Dreiecksfigur für die Reduction der einzelnen indefiniten Form verwertet haben, bleibt jetzt noch die abschliessende Frage zu besprechen nach der Gesammtheit der reducirten Formen einer Klasse. Von

Seiten der Zahlentheorie wissen wir darüber, dass die reducirten Formen eine Kette von unendlicher Gliederzahl bilden, die aperiodisch ist, falls nicht gerade die a, b, c commensurable Zahlen sind. In geometrischer Hinsicht möchte man nun erfahren: Wie verteilen sich die repräsentirenden Punkte auf das reducirte Gebiet? Nach einem bekannten Grundsatze von Weierstrass müssen unendlich viele Punkte mindestens eine Häufungsstelle haben. Man wird also vor Allem fragen: wo liegen die Häufungsstellen etc.? Diese interessanten Fragen sind bisher gänzlich unerledigt.

Nur eine negative Aussage lässt sich ohne Weiteres hierüber geben: Es ist nicht möglich das Aeussere des Kegelschnittes so in Fundamentalbereiche zu zerlegen, dass keine zwei Punkte des einzelnen Bereiches aequivalent sind. Dass dieses im Innern des Kegelschnitts möglich war, lag daran, dass die Fixpunk-

te M_2 u. M_3 der Collineationen im Innern des Kegelschnittes einen endlichen Abstand von einander haben. In Folge dessen legen sich hier die Fundamentalbereiche, indem jeder an einen Punkt M_2 und einen Punkt M_3 heranreicht, als Gebiete endlicher Ausdehnung an einander. Der Winkel, mit dem sich der Bereich an seinen Punkt M_2, bezw. M_3 heranzieht, ist der zugehörige Pell'sche Winkel, d. h. 180°, bezw. 120°. Dies ist ersichtlich nothwendig. Nun wissen wir aber, dass im Aeusseren des Kegelschnittes jeder rationale Punkt Fixpunkt einer Collineation ist, und dass die rationalen Punkte die Ebene überall dicht überdecken. Der gesuchte Fundamentalbereich müsste sich daher an jeden seiner rationalen Punkte mit einer Ecke heran ziehen, deren Winkel durch den Pell'schen Winkel der betr. Automorphie bestimmt ist. Wir würden so zu

einem Bereiche kommen, der unse-
rer Raumvorstellung absolut un-
zugänglich ist und welcher das
Gegenteil von einer continuirlichen
Gebietsüberdeckung darstellt. Es
ist noch eine offene Frage, wie man
die vorliegenden zahlentheoretischen
Ergebnisse hinsichtlich der indefini
ten Formen in ihrer Gesammtheit
geometrisch aufzufassen hat.
Dabei liegen die Verhältnisse ausser-
halb des Kegelschnittes auch durchaus
anders, als es auf der Peripherie
desselben der Fall ist. Auf der Periphe-
rie waren die sämmtlichen Klassen
aequivalenter Punkte, wie wir sahen,
überall dicht verteilt. Das findet aus-
serhalb nicht mehr statt. Denn bei-
spielsweise gibt es zu jedem rationa-
len Punkte ja nur eine endliche An-
zahl aequivalenter Punkte. In gewis-
ser Hinsicht sind also hier die
aequivalenten Punkte sogar aus-
serordentlich dünn verteilt.
Wir wollen das vorliegende Pro

lem noch in abstracterer Weise aussprechen. Wir wollen nämlich allgemein fragen: *Ist es möglich die Classen der indefiniten Formen irgendwie in der Ebene zu lokalisiren?* (so dass jeder Classe ein einziger repräsentirender Punkt zugewiesen wird).

Eine Classe indefiniter Formen ist vollkommen bestimmt durch eine Reihe von ganzen Zahlen

$$\ldots\ \mu_{-2},\ \mu_{-1},\ \mu_0,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \ldots\ -,$$

welche wir uns als Seitenlängen eines Umrisspolygons (im Gitter) oder als Winkelöffnungen einer Zickzacklinie (*innerer* Dreiecksfigur) vorstellen mögen. Zwei Formen sind aequivalent, wenn ihre zugehörigen Zahlenreihen identisch ausfallen, wobei die Reihen natürlich noch gegeneinander verschoben sein können. Es käme nun darauf an, die Gesamtheit dieser Zahlenreihen in übersichtlicher Weise geeigneten Punkten einer Ebene zuzuordnen. Wir kommen so auf ein Problem von viel mehr arith-

metischem als geometrischem Charakter, welches an die Ideen der Cantor'schen Mengenlehre erinnert. Welches ist der durch die Natur der Sache gegebene „Ordnungstypus" der von unseren Zahlenreihen gebildeten Menge?

Zum Abschlusse werden wir sagen müssen, dass die Theorie der indefiniten Formen viel und schwieriger aber auch interessanter ist, als die der definiten Formen, weil sie auf noch unerledigte Fragestellungen führt. Aber eben deshalb müssen wir diese Theorie jetzt verlassen.

Nunmehr kehren wir zu den definiten Formen zurück. Dabei werden wir für den Rest der Vorlesung unserer Betrachtungen ausser auf Zahlentheorie und Geometrie noch auf den dritten Grundpfeiler der mathematischen Gesammtwissenschaft, auf die Functionentheorie, stützen. Wir überschreiben nämlich das folgende Capitel:

Ueber den Zusammenhang der definiten quadratischen Formen mit der Theorie der elliptischen Functionen.

Der Grund dieses Zusammenhanges ruht auf der elementar-geometrischen Vorstellung eines Parallelengitters, zu welchem die quadratischen Formen einerseits und die elliptischen Functionen andrerseits hinführen.

Die Gittertheorie der definiten Formen ist uns von früher bekannt. Wir können dabei unsere Gitter (da es sich ausschliesslich um definite Formen handeln soll) in der gewöhnlichen Maassbestimmung construiren. Wir tragen bei gegebener Form

$$f = ax^2 + bxy + cy^2$$

von einem Puncte o die Strecken $\sqrt{a}$ und $\sqrt{c}$ unter dem Winkel

$$\chi = \arccos \frac{b}{2\sqrt{ac}}$$

gegen einander ab. Dabei werden wir gegen früher zweckmässigerweise eine kleine Modification eintreten lassen. Wir legen nämlich die Strecken so, dass $V\bar{c}$ durch eine positive Drehung um den Winkel χ in Va übergeht. Diese Festsetzung hat das Unbequeme, dass in der Folge die x- und y- Axen die umgekehrte Lage haben werden, wie gewöhnlich; sie ist aber nothwendig, wenn wir mit den üblichen Bezeichnungen aus der Theorie der elliptischen Functionen in Uebereinstimmung sein wollen.

An das erste Parallelogramm setzen wir fortgesetzt congruente an; die Ecken dieser Parallelogramme haben zu Coordinaten x und y ganze Zahlen. Der Wert der Form f im Punkte $x\ y$ wird geometrisch durch die (elementar gemessene) Entfernung $r^2 = ax^2 + bxy + cy^2$ gegeben. Die Form f lösen wir in zwei conjugirt imaginäre Bestandtheile auf. Dabei können

wir noch dem einen Bestandtheil ei-
ner Proportionalitätsfactor will-
kürlich hinzufügen, vorausgesetzt, dass
wir dem anderen den reciproken Fac-
tor beilegen. Sollen die Bestandtheile
conjugirt imaginär sein, so muss
der Factor die Form haben $= e^{i\varphi}$,
so dass unsere Zerlegung lautet:

$$f = e^{i\tau}\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b+\sqrt{D}}{2\sqrt{a}}\,y\right) e^{-i\tau}\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b-\sqrt{D}}{2\sqrt{a}}\,y\right).$$

Der einzelne Bestandtheil ist eine
complexe Zahl u. zw. gerade die-
jenige, welche dem Gitterpuncte x, y
in der Gaussischen Ebene zukommt.
Der Factor $e^{i\tau}$ werde als Azimu-
thalfactor bezeichnet, der Winkel τ
bedeutet nämlich dasjenige Azimuth,
unter dem die x-Axe gegen die Axe
der reellen Zahlen in der Gaussi-
schen Ebene geneigt ist. Wir nennen

$$e^{i\tau}\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b+\sqrt{D}}{2\sqrt{a}}\,y\right)$$

eine complexe Gitterzahl. Die
Form f erscheint dabei als Norm
dieses Systems von Gitterzahlen.

Andrerseits führt ein parallelogrammatisches Gitter sofort auf den Begriff der doppelperiodischen Functionen. Die Perioden ω_1, ω_2 derselben sind diejenigen complexen Zahlen, welche den Endpunkten der von 0 auslaufenden Parallelogrammseiten entsprechen. Die allgemeinste Periode lautet dann, unter x, y ganze Zahlen verstanden $\omega_1 x + \omega_2 y$. Wollen wir ω_1, ω_2 durch die Coefficienten der quadratischen Form ausdrükken, so haben wir

$$\omega_1 = e^{i\varphi}\sqrt{a}$$

$$\omega_2 = e^{i\varphi}\frac{b+\sqrt{D}}{2\sqrt{a}},$$

wie man erkennt, wenn man in dem oben stehenden Ausdrucke der Gitterzahlen $x=1$, $y=0$ bez. $x=0$, $y=1$ einträgt. Wollen wir umgekehrt die quadratische Form durch ω_1 und ω_2 ausdrükken, so berechnen wir die Norm

der allgemeinen complexen Gitterzahl oder, was dasselbe ist, die Norm der allgemeinen Periode

$$\omega_1 x + \omega_2 y.$$

Wir erhalten so:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = (\omega_1 x + \omega_2 y)(\bar{\omega}_1 x + \bar{\omega}_2 y).$$

Nun interessirt uns in der Zahlentheorie weniger die einzelne Form als die ganze Klasse von Formen, welche durch die Substitutionen

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha x' + \beta y' \\ y &= \gamma x' + \delta y' \end{aligned}\right\} \alpha\delta - \beta\gamma = +1$$

verbunden sind. Bei dieser Substitution erleiden auch die Perioden eine Umänderung.

Es wird nämlich

$$\omega_1 x + \omega_2 y = (\alpha\omega_1 + \gamma\omega_2)x' + (\beta\omega_1 + \delta\omega_2)y'.$$

Setzen wir dieses gleich

$$\omega_1' x' + \omega_2' y'$$

so haben wir

$$\left.\begin{aligned} \omega_1' &= \alpha\omega_1 + \gamma\omega_2 \\ \omega_2' &= \beta\omega_1 + \delta\omega_2 \end{aligned}\right\} \alpha\delta - \beta\gamma = +1.$$

Die Perioden erfahren also eine Trans=

formation, welche wir als Transformation erster Ordnung bezeichnen. Sie entsteht aus der vorigen Transformation für die Gittercoordinaten x, y durch blosse Vertauschung von β und γ.

Durch den Vergleich mit der Zahlentheorie werden wir so darauf geführt, diese Transformationen erster Ordnung principiell in die Betrachtung einzuführen und solche Functionen zu suchen, welche nicht nur bei den Substitutionen ungeändert bleiben:

$$u' = u + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2$$

(also schlechtweg doppelperiodisch sind) sondern auch bei den Periodentransformationen

$$\left.\begin{array}{l} \omega_1' = \alpha \omega_1 + \gamma \omega_2 \\ \omega_2' = \beta \omega_1 + \delta \omega_2 \end{array}\right\} \alpha\delta - \beta\gamma = +1.$$

Diese Functionen nennen wir nun elliptische Functionen, so dass die elliptischen Functionen durch die vorstehende ternäre Gruppe definirt sein sollen. Der Inbegriff aller solcher Functionen soll - vorbe-

haltlich einer späteren Verschärfung des Begriffes, und unbeschadet späterer Verallgemeinerungen – ein elliptisches Gebilde heissen. Der einzelnen Klasse quadratischer Formen tritt also ein elliptisches Gebilde an die Seite.

Nehmen wir im Speciellen die Coefficienten a, b, c der Form als ganze Zahlen an, so tritt der besondere Fall ein, dass jedesmal eine endliche Anzahl (h) von Klassen zusammengehört, dass sind die Klassen der gleichen Discriminante D. Dementsprechend gibt es dann auch h zusammengehörige elliptische Gebilde. Wir nennen diese Gebilde, – also diejenigen, die zu ganzzahligen quadratischen Formen gehören –, singuläre elliptische Gebilde. Unser besonderes Interesse wird sein, zu untersuchen, wie sich diese singulären Gebilde von den allgemeinen elliptischen Gebilden unterscheiden und wie sich ihre zahlentheoretische Zusammengehörigkeit analytisch aus-

drückt.

Do. d. 13. II. 96. Zu der obigen Definition der elliptischen Functionen fügen wir als erste Einschränkung hinzu, dass die Function in den 3 Grössen u, ω_1, ω_2 <u>homogen</u> sein soll. Wir verlangen also, dass eine elliptische Function $\varphi(u, \omega_1, \omega_2)$ der folgenden Functionalgleichung genügen soll:

$$\varphi(\lambda u, \lambda \omega_1, \lambda \omega_2) = \lambda^r \varphi(u, \omega_1, \omega_2),$$

in welcher r den gemeinsamen Grad bezeichnet, in welchem jene 3 Grössen vorkommen. Wir haben es daraufhin nicht sowohl mit Functionen, sondern specieller mit „Formen" zu thun. Diesem Umstande wollen wir in der Bezeichnung Rechnung tragen; wir wollen, falls $r \gtrless 0$ ist, von <u>elliptischen Formen</u> sprechen und wollen als <u>elliptische Functionen</u> nur diejenigen bezeichnen, für welche $r = 0$ ist.

In Folge der verabredeten Homogenität können wir übrigens unsere

3 Argumente auf 2 reduciren. Dividiren wir nämlich unsere Form r^{ten} Grades $\varphi(u, \omega_1, \omega_2)$ durch ω_2^r und führen wir die neuen Grössen $v = \frac{u}{\omega_2}$ und $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ ein, so haben wir

$$\varphi(v, \omega, 1) = \frac{1}{\omega_2^r}\ \varphi(u, \omega_1, \omega_2).$$

Die Gleichung

$$\varphi(u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2, \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) = \varphi(u, \omega_1, \omega_2),$$

welche die Invarianteneigenschaft der elliptischen Formen ausspricht, nimmt dann folgende Gestalt an:

$$\varphi\left(\frac{v + m_1\omega_1 + m_2\omega_2}{\gamma\ \omega + \delta}, \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, 1\right) =$$
$$\left(\frac{1}{\gamma\ \omega + \delta}\right)^r \varphi(v, \omega, 1).$$

Wir werden jedoch von dieser inhomogenen Schreibweise im Allgemeinen keinen Gebrauch machen, weil, wie schon die vorstehende Gleichung zeigt, der Vorteil, mit zwei Variabeln auszukommen, nur durch Aufgeben der Symmetrie erkauft wird. Nur wenn das v gar nicht vorkommt, wenn wir also

eine sog. elliptische Modulfunktion oder Modulform haben, werden wir auf die vorstehende Gleichung wiederholt zurückkommen.

Zunächst wollen wir die einfachsten Repräsentanten der elliptischen Funktionen aufstellen. Wir stellen uns also die Aufgabe, Invarianten unserer ternären Gruppe aufzufinden. Allgemein wird man dieses folgendermassen bewerkstelligen: Man geht von irgend einem Ausdruck in den u, ω_1, ω_2 aus, transformirt diesen mittelst aller Substitutionen der Gruppe und bildet eine symmetrische Function aller so erhaltenen Ausdrücke. Ist die Gruppe eine endliche, so hat dieses keine Schwierigkeit. Ist aber, wie in unserm Falle, die Gruppe unendlich, so muss man die Convergenz im Auge haben.

Gehen wir speciell von einer Potenz von u aus, u^r, so erhalten wir nach dem angegebenen Verfahren eine Invariante der Gruppe in dem folgen-

den Ausdruck:

$$\Sigma_{(m_1, m_2)} \quad (u - m_1 \omega_1 - m_2 \omega_2)^r,$$

wo m_1, m_2 alle Zahlen zwischen $-\infty$ und $+\infty$ durchlaufen. In der That erkennt man, dass bei sämmtlichen Substitutionen unserer Gruppe die Glieder der Reihe nur untereinander verstellt werden. Ausserdem ist dieser Ausdruck homogen vom r ten Grade. Der Convergenz wegen aber müssen wir festsetzen, dass $r \leqq 3$ genommen werde (vergl. die folgenden Ausdrücke für p', g_2 und g_3). Soll aber $r > -3$ genommen werden, so müssen wir die Reihe erst durch Hinzufügung passender Glieder convergent machen. (vergl. die folgende Gleichung für p). In diesem Sinne ist die Darstellung der elliptischen Functionen von <u>Eisenstein</u> begonnen und von <u>Weierstrass</u> weiter ausgebildet worden. Die fundamentalen Functionen der Weierstrassischen Theorie sind die folgenden:

$$\wp(u,\omega_1,\omega_2) = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(u-m_1\omega_1-m_2\omega_2)^2} - \frac{1}{(m_1\omega_1+m_2\omega_2)^2}\right],$$

$$\wp'(u,\omega_1,\omega_2) = -2\sum \frac{1}{(u-m_1\omega_1-m_2\omega_2)^3},$$

$$g_2(\omega_1,\omega_2) = 60\sum \frac{1}{(m_1\omega_1+m_2\omega_2)^4},$$

$$g_3(\omega_1,\omega_2) = 140\sum \frac{1}{(m_1\omega_1+m_2\omega_2)^6}.$$

Diese Ausdrücke sind in unserer Terminologie elliptische Formen vom bezw. $-2, -3, -4, -6^{ten}$ Grade. Es zeigt sich, dass man die ähnlich gebildeten Summen von kleinerem * auf die vorstehenden zurückführen kann.

Zwischen $\wp$, $\wp'$, g_2 und g_3 bestehen die folgenden Relationen:

$$\wp' = \frac{d\wp}{du}, \quad \wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3.$$

Aus g_2 und g_3 bilden wir noch eine weitere wichtige elliptische Form Δ, welche in der Weierstrassischen Theorie zurücktritt und nur gelegentlich unter der Bezeichnung G vorkommt. Man wird auf dieselbe

geführt, wenn man die rechte Seite der letzten Gleichung in Factoren zerlegt:

$$4p^3 - g_2 p - g_3 = 4(p-e_1)(p-e_2)(p-e_3)$$

und die Discriminante der Gleichung

$$4p^3 - g_2 p - g_3 = 0$$

bildet. Die neue Grösse Δ ist bis auf einen Zahlenfactor gleich dieser Discriminante:

$$\Delta = 16(e_1-e_2)^2(e_1-e_3)^2(e_2-e_3)^2 = g_2^3 - 27g_3^2 = 16G.$$

Hiernach wird Δ eine elliptische Form vom Grade −12. Endlich bilden wir noch eine elliptische Function (Form 0ten Grades) oder, wie man in der Invariantentheorie sagt, eine absolute Invariante, indem wir setzen:

$$J = \frac{g_2^3}{\Delta}, \text{ oder was dasselbe ist:}$$

$$J - 1 = \frac{27 g_3^2}{\Delta}.$$

Unsere bisherige Definition der elliptischen Functionen, als Invarianten der ternären Gruppe, welche in ihren 3 Argumenten homogen sind, war

nur eine vorläufige. Wir bemerken nämlich, dass unter jene Definition auch Functionen fallen, welche als Functionen von u, ω_1, ω_2 alle möglichen Arten von Singularitäten haben. Wollen wir dieses ausschliessen, so müssen wir unsere Definition verengern. Wir sagen daher jetzt: <u>Wir verstehen fortan unter einer elliptischen Function nur eine rationale Function von $\wp, \wp', g_2$ und g_3, welche überdies der Homogenitätsregel Genüge leistet.</u> (Dass eine solche Function auch die oben geforderte Invarianteneigenschaft besitzt, versteht sich von selbst).

Dementsprechend verengern wir auch die frühere Definition des elliptischen Gebildes: <u>Wir verstehen fortan unter dem elliptischen Gebilde die Gesamtheit der rationalen Functionen von $\wp, \wp', g_2, g_3$.</u>

Dieser Begriff deckt sich daher mit dem Begriffe eines <u>Rationalitätsbereiches</u>. In unserem Falle ist der

Rationalitätsbereich festgelegt durch die Grössen $\wp, g_2, g_3$ zu welchen noch die Grösse $\wp'$ als Wurzel der Gleichung $\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$ adjungirt ist.

Wir werden jedoch neben dieser indirecten Definition der elliptischen Functionen eine independente Definition fordern, welche nicht auf die Darstellung derselben durch die $\wp$ und $\wp'$ .... zurückgreift. Zu dem Zwecke müssen wir uns zunächst die Bedeutung des Periodenparallelogramms noch klarer machen.

Das Periodenparallelogramm war ursprünglich vom gruppentheoretischen Standpunkte definirt. Es war der Inbegriff aller nichtaequivalenter Punkte der u-Ebene, d. h. derjenigen Werte, welche durch keine Substitution $u' = u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ zusammenhängen. Das Periodenparallelogramm misst sonach die Discontinuität der Gruppe, es ist ihr Discontinuitätsbereich.

Betrachten wir es jetzt vom functionentheoretischen Standpunkt: In dieser Hin-

sicht wissen wir, dass eine doppelperiodische Funktion $\wp$, welche zu dem Periodenparallelogramm gehört, in jedem Parallelogramm der Gitterteilung genau dieselben Werte annimmt, wie in jedem anderen. Das Periodenparallelogramm erschöpft also alle Werte, deren die Funktion $\wp$ fähig ist; es stellt ihren Fundamentalbereich dar.

Die beiden Begriffe: Discontinuitätsbereich der Gruppe – und – Fundamentalbereich der doppeltperiodischen Funktionen fallen eben nothwendig zusammen.

Eine weitere Frage wird sein, wie oft eine doppelperiodische Function einen vorgegebenen Werte im Fundamentalbereiche annimmt. Man überzeugt sich insbesondere, dass $\wp$ jeden Werth an 2 Stellen, $\wp'$ jeden Werth an 3 Stellen des Periodenparallelogramms annimmt. Man zeigt ferner, dass das Wertepaar $(\wp, \wp')$ jeden Wert im Periodenparallelogramm nur an einer Stelle annimmt (wobei natürlich nur solche Werte in Betracht kommen, wel-

che vermöge der Relation

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$

überhaupt möglich sind)

Wenn wir das Wertepaar $\wp$, $\wp'$ betrachten wollen, so werden wir uns die Abhängigkeit von $\wp$ und $\wp'$ durch eine Riemann'sche Fläche vorstellen u. zw. können wir entweder über der $\wp$-Ebene, den zwei zugehörigen Werten von $\wp$ entsprechend, eine zweiblättrige Riemann'sche Fläche construiren, oder über einer $\wp'$-Ebene, den 3 Werten von $\wp$ entsprechend, eine dreiblättrige Fläche ausbreiten. Die eine oder die andere Fläche ist, dem Vorstehenden zufolge, eindeutig auf das Periodenparallelogramm bezogen. <u>Das Periodenparallelogramm ist einfach das conforme Abbild der zwei- (oder drei-) blättrigen Riemann'schen Fläche.</u>

Frei. d. 14. II. Jetzt ist es leicht, von der obigen indirecten zu einer directen Definition der elliptischen Functionen überzugehen, d. h. zunächst, soweit die Variable u in Betracht kommt. Indem wir

sagten: die elliptischen Functionen sind rationale Functionen von p und p', characterisirten wir sie durch ihr Verhalten auf der Riemann'schen Fläche (p, p'). Eine rationale Function ist nämlich, functionentheoretisch gesprochen, eine solche, welche nirgends wesentlich singulär ist, oder auch eine solche, welche jeden Wert nur eine endliche Anzahl von Malen annimmt. Unsere frühere Definition besagt also, dass die elliptischen Functionen auf der Riemann'schen Fläche (p, p') keine wesentlichen Singularitäten haben oder, was dasselbe ist, dass sie jeden Wert nur eine endliche Anzahl von Malen erreichen. Diese Eigenschaft überträgt sich nun aber sofort auf das Periodenparallelogramm. Wir können daher, was das u angeht, die folgende independente Definition aufstellen.

<u>Eine elliptische Function ist eine solche homogene Invariante der ternären Gruppe, welche im Perioden</u>

parallelogramm der u-Ebene keine wesentliche Singularität besitzt oder jeden Wert nur eine endliche Anzahl von Malen annimmt.

Damit ist unsere Definition aber noch nicht vollständig. Die elliptischen Functionen sind doch Functionen von 3 Argumenten u, ω_1, ω_2. Während durch das Vorstehende ihre Abhängigkeit von der Variabeln u präcisirt ist, bleiben uns jetzt noch ihre Eigenschaften in den ω_1 ω_2 zu charakterisiren. Functionen, welche sich betreffs der Variabeln u in der angegebenen Weise verhalten, sind rationale Functionen von p und p'. Die Coefficienten dieser rationalen Functionen hängen ihrerseits von ω_1 und ω_2 ab; sie sind nach unserer obigen Bezeichnung Modulformen $\phi(\omega_1, \omega_2)$ und genügen der Functionalgleichung

$$\phi(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) = \phi(\omega_1, \omega_2).$$

Diese Gleichung ist aber zur Defi-

nition der Modulformen noch nicht ausreichend; sie entspricht hinsichtlich der Variabeln ω_1, ω_2 nur der allgemeinen Forderung, welche wir vorher hinsichtlich der Variabeln u aufsteckten, wonach die elliptischen Functionen in u doppelperiodisch sein sollten. Es müssen vielmehr noch Einschränkungen hinsichtlich des functionentheoretischen Characters der Modulformen hinzutreten, entsprechend dem Umstande, dass wir vorher in der Variabeln u das Auftreten von wesentlichen Singularitäten im Periodenparallelogramm ausschlossen. Dies geschah bereits oben durch die Festsetzung, dass die elliptischen Functionen auch von den g_2, g_3 rational abhängen sollten. Die Frage muss wieder sein, wie sich diese Bedingung independent ausdrückt, wenn wir ω_1, ω_2 als unabhängige Variable festhalten. Zu dem Zwecke beschränken wir uns zuvörderst auf Modulfunctionen im engeren Sinne, also auf Modulformen 0ten Grades. Die

selben sind direct Functionen von $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \omega$ und genügen als solche nach pg. 303 der Gleichung:

$$\phi(\omega) = \phi\left(\frac{\alpha\,\omega+\beta}{\gamma\,\omega+\delta}\right).$$

Andrerseits werden sie rationale Functionen nicht nur von g_2, g_3, sondern direct von der absoluten Invariante J sein.

Wir verlegen jetzt die Betrachtung in die Ebene der Variabeln ω. Wie zerlegt sich diese Ebene entsprechend den Substitutionen

$$\omega = \frac{\alpha\,\omega'+\beta}{\gamma\,\omega'+\delta}$$

in Discontinuitätsbereiche? Wie verhält sich J im einzelnen Discontinuitätsbereiche? Und wie verhält sich eine beliebige rationale Function von J?

Haben wir dieses erledigt, so müssen wir noch ein besonderes Verfahren angeben, um von den Modulfunctionen zu den allgemeinenen Modulformen eines von Null verschiedenen Grades aufzusteigen.

Bei der Frage nach dem Discontinuitätsbereiche der ω-Ebene knüpfen wir an die Theorie der quadratischen Formen an, womit wir die damals abgeleiteten Resultate jetzt direct benutzen können. Nach pg. 299 oben ist das Periodenverhältnis $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ Wurzel der quadratischen Gleichung:

$$a\omega^2 + b\omega + c = 0.$$

Da a, b, c die Coefficienten einer definiten quadratischen Form sind, werden die beiden Wurzeln conjugirt imaginär. Wir schreiben deshalb $D = -\Delta$ und bezeichnen die Wurzel mit positivem bez. negativem imaginaren Bestandtheil durch ω bez. $\bar{\omega}$:

$$\omega = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \bar{\omega} = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Wir betrachten jetzt die Ebene $a:b:c$ und die ω Ebene nebeneinander. <u>Nach den vorstehenden Formeln gehört zu jedem Punkte der ersteren Ebene ein Punktepaar der zweiten Ebene</u>. Setzen wir $\omega = x + iy$ und entsprechend $\bar{\omega} = x - iy$, so dass

x und y rechtwinkliche Coordinaten in der w Ebene bedeuten, so bestimmt sich die Lage unseres Punktepaares durch die Gleichungen:

$$x = \frac{-b}{2a}\ ,\ y = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Die beiden Punkte des Paares sind hiernach reell nur dann, wenn $\Delta > 0$, wenn also der Punkt a, b, c im Innern des fundamentalen Kegelschnitts liegt; sie fallen zusammen, wenn a, b, c auf den Rand rückt; sie werden imaginär, wenn der Punkt a, b, c sich ausserhalb des Kegelschnittes befindet.

<u>Umgekehrt gehört zu jedem Punkte der w - Ebene ein bestimmter Punkt der Ebene a, b, c.</u> Berechnet man nämlich nach den vorstehenden Formeln $x^2 + y^2$, so ergibt sich $x^2 + y^2 = \frac{c}{a}$, worauf man die folgende Proportion aufschreiben kann:

$$a : b : c = 1 : -2x : x^2 + y^2.$$

Dieselbe zeigt in der That, dass dem Punkte x, y ein ganz bestimmter Punkt $a : b : c$ entspricht. <u>Die Beziehung</u>

zwischen der ω-Ebene und der a, b, c-Ebene, so können wir sagen, ist eine ein-zweideutige Verwandtschaft.

Nun sind uns die Discontinuitätsbereiche in der a, b, c-Ebene, welche die Gruppe der $\binom{\alpha\ \beta}{\gamma\ \delta}$ Collineationen entwirft, wohlbekannt. Da wir ferner auch den Zusammenhang der a, b, c-Ebene mit der ω-Ebene kennen, so werden wir jetzt die Gestalt der Discontinuitätsbereiche aus jener in diese Ebene umsetzen können. Hierzu dienen folgende Bemerkungen:

1. Dem fundamentalen Kegelschnitt der a, b, c-Ebene entspricht die reelle Axe der ω-Ebene, denn $D = 0$ ergibt nach pg. 317 $y = 0$.

2. Den Geraden der a, b, c-Ebene entsprechen in der ω-Ebene Kreise, welche ihren Mittelpunkt auf der reellen Axe haben und diese also senkrecht schneiden, denn aus der Gleichung $Aa + Bb + Cc = 0$ entsteht vermöge der obigen Proportion:

$$A - 2Bx + C(x^2 + y^2) = 0.$$

3. Den $\binom{\alpha\beta}{\gamma\delta}$-Collineationen in der Ebene $a:b:c$, welche den fundamentalen Kegelschnitt in sich transformiren, entsprechen in der ω-Ebene Kreisverwandtschaften, welche die reelle Axe ungeändert lassen. Dabei werden Kreise, welche die reelle Axe senkrecht schneiden, in ebensolche übergeführt. U. zw. verschieben Kreisverwandtschaften, welche den Collineationen $\alpha\delta-\beta\gamma=+1$ entsprechen, die reelle Axe gleichstimmig in sich; sie führen die positive ω-Halbebene in die positive über, dagegen verschieben diejenigen Kreisverwandtschaften, welche aus den Collineationen $\alpha\delta-\beta\gamma=-1$ hervorgehen, die reelle Axe ungleichstimmig in sich, sie vertauschen die positive mit der negativen Halbebene.

4. Die imaginären Tangenten des fundamentalen Kegelschnittes, welche von den Punkten des Kegelschnitt inneren auslaufen, verwandeln sich in die Minimallinien, welche

von den reellen Punkten der ω-Ebene ausgehen. (Wir denken uns hier also vorübergehend die a, b, c und ebenso die x, y der ω-Ebene selbst als complexer Werthe fähig). Sei nämlich $a_0\, b_0\, c_0$ irgend ein Punkt im Innern des Kegelschnittes. Die Berührungspunkte der von ihm ausgehenden Tangenten haben Parameterwerte ω, welche der Gleichung genügen $a_0\,\omega^2 + b_0\,\omega + c_0 = 0$. Sei ω_0 eine Wurzel dieser Gleichung, so lautet die Gleichung der zugehörigen Tangente $a\,\omega_0^2 + b\,\omega_0 + c = 0$, wo a, b, c die laufenden Coordinaten der Tangente sind. Dem variabeln Punkte a, b, c entspreche in der ω-Ebene der variable Wert ω, wobei $a\,\omega^2 + b\,\omega + c = 0$. Wir haben ersichtlich: $\omega = \omega_0$, oder, wenn wir ausführlich setzen $\omega = x + iy$, $\omega_0 = x_0 + iy_0$: $x + iy = x_0 + iy_0$. Hier gelten x, y, wie wir schon andeuteten, selbst als complexer Werte fähig. Unter dieser Voraussetzung haben

wir die Gleichung einer Minimalgeraden der w-Ebene, welche durch den reellen Punkt x_0, y_0 hindurchgeht. Ebenso entspricht der zweiten Tangente im Punkte a_0, b_0, c_0 die zweite Minimalgerade durch x_0, y_0.

5. Der Winkel, unter dem sich zwei Curven in der a, b, c-Ebene schneiden, gemessen im Sinne der Cayley'schen Maassbestimmung, ist gleich dem Winkel, unter dem sich die entsprechenden beiden Curven in der w-Ebene treffen, gemessen im elementaren Sinne.

Der Cayley'sche Winkel war definirt durch $\frac{i}{2}$ multiplicirt mit dem Logarithmus des Doppelverhältnisses, welches die beiden gegebenen Richtungen mit den Tangenten an den fundamentalen Kegelschnitt bilden. Nun ist unsere Beziehung zwischen der a, b, c- und der w-Ebene allerdings keine projective, bei der das Doppelverhältnis schlechtweg ungeändert bleibt. Indessen ist im Infinitesimalen eine jede Punkt-

transformation eine projective Beziehung. Bei der Messung des Winkels kommt es aber nur auf das Verhalten der Linienelemente im Schnittpunkte an. Das Doppelverhältnis jener 4 Richtungen in der a, b, c Ebene wird daher gleich dem Doppelverhältnis der 4 entsprechenden Richtungen in der w-Ebene, d. h. der den gegebenen Curven entsprechenden Richtungen und der beiden Minimallinien durch ihren Schnittpunkt. Der Logarithmus dieser Grösse ist aber, noch multiplicirt mit $i/2$, direct gleich dem elementar gemessenen Winkel.

Do. d. 20. II. Hiernach ist es leicht, die ganze Dreiecksfigur aus der a, b, c-Ebene in die w-Ebene zu übertragen. Wir grenzen zunächst dasjenige Gebiet ab, welches dem schraffirten Elementardreieck des reducirten Raumes aus unserer Dreiecksfigur entspricht. Dieses hatte zu Seiten die Geraden a = b, b = c, a = c.

Nach der Proportion von pg 317 sind die entsprechenden Linien der w-Ebene durch die Gleichungen gegeben:

$$x = -\frac{1}{2}, \quad x = 0 \text{ und } x^2 + y^2 = 1;$$

sie grenzen in der w-Ebene zwei spiegelbildlich gleiche Kreisbogendreiecke ab, das eine in der positiven, das andere in der negativen Halbebene gelegen. Die elementar gemessene Winkel dieses Kreisbogendreiecks betragen, wie die Figur zeigt, bez. $\pi/3$, $\pi/2$ und 0. Dieselben Winkel besitzt, wie es sein muss, unser geradliniges Dreieck in der a, b, c-Ebene bei Cayley'scher Maass-

Bestimmung.

Nun entstand die ganze Dreiecksfigur aus dem reducirten Dreiecke dadurch, dass wir auf dieses die Operationen der Gruppe $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ ausübten. Dieselben Operationen üben wir auf eines der beiden Kreisbogendreiecke, etwa auf das in der positiven Halbebene gelegene aus. Dabei entstehen nach 2) und 3) pg 318 und 319 unendlich viele Abbilder unseres Kreisbogendreiecks u.zw. liegen bei den Operationen von der Determinante +1 die sämmtlichen Abbilder in der positiven, bei denen von der Determinante −1 in der negativen Halbebene. Aber es bleiben noch neben jedem so erhaltenen Dreiecke Gebiete frei.

Beispielsweise kommen wir zu dem Spiegelbilde des anfänglichen Dreiecks in der negativen Halbebene nicht hingelangen. Überhaupt bleiben alle solche und nur solche Gebiete frei, welche Spiegelbilder der bisher construirten Kreisbo-

-gendreiecke in Bezug auf die reelle Axe sind. Wir wollen alle bisher construirten Gebiete schraffiren und die bisher frei gebliebenen unschraffirt lassen.

Die Spiegelung an der reellen Axe bedeutet die Operation $x' = x, y' = -y$ bez. $\omega' = \bar{\omega}$. Setzen wir diese Operation mit einer Operation der $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ Gruppe zusammen, so ergiebt sich:

$$\omega' = \frac{\alpha\bar{\omega} + \beta}{\gamma\bar{\omega} + \delta}.$$

Durch alle Operationen dieser Art wird das Ausgangsdreieck successive in alle bisher frei gebliebenen Gebiete verwandelt.

Wir sprechen von der „erweiterten" Gruppe, wenn wir gleichzeitig die Operationen

I.) $\omega' = \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$, $\omega' = \frac{\alpha\bar{\omega}+\beta}{\gamma\bar{\omega}+\delta}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$

betrachten. Sie enthält als Untergruppen

II.) $\omega' = \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$; $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$

III). $\omega' = \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$, $\omega' = \frac{\alpha\bar{\omega}+\beta}{\gamma\bar{\omega}+\delta}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$.

und als fernere Untergruppe:

IV) $\omega' = \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$.

Man bemerke wohl, dass das Wort „erweiterte Gruppe" hier in anderm Sinne gebraucht ist, wie bei den Betrachtungen in der a, b, c-Ebene. Die Erweiterung, welche wir soeben vornahmen, hat in der a, b, c-Ebene keinen Sinn; denn die Operation $X' = X$, $Y' = -Y$ bedeutet dort, wie aus der Proportion von pg. 317 hervorgeht, einfach die Identität.

Auch die Schraffirung haben wir in der ω-Ebene anders eingerichtet als in der a, b, c-Ebene. Es entsprechen nämlich die schraffirten Gebiete der positiven Halbebene den schraffirten, die schraffirten Gebiete der negativen Halbebene den nicht schraffirten Gebieten der a, b, c-Ebene. Dasselbe gilt für die nicht-schraffirten Gebiete der ω-Ebene. Der Grund

für diese Discordanz liegt darin, dass die Beziehung zwischen der a, b, c- und der ω-Ebene eine <u>ein-zweideutige</u> Verwandtschaft ist.

Das Resultat dieser Überlegungen ist folgendes: (wegen der genaueren Begründung verweisen wir auf „Modulf.". Bd. I pg 112 und 113):

<u>Unser ursprüngliches Kreisbogendreieck bildet den Discontinuitätsbereich der erweiterten Gruppe (I) für die ganze ω-Ebene. Gleichzeitig liefert es den Discontinuitätsbereich der Untergruppe III für die positive Halbebene. Dagegen bildet unser schraffirtes Ausgangsdreieck zusammen mit einem anliegenden nichtschraffirten Dreieck den Discontinuitätsbereich der Untergruppe II für das Gebiet der ganzen Ebene, den der Untergruppe IV für das Gebiet der positiven Halbebene.</u>

Die so eingeteilte ω-Ebene wird das geometrische Substrat sein, in welchem wir die elliptischen Mo-

dulfunctionen studiren. Hinsichtlich des hiermit besprochenen Überganges zur ω-Ebene bemerken wir jedoch noch Folgendes: An sich wäre es für unsere functionentheoretischen Zwecke gar nicht nötig gewesen, unsere geradlinige Figur in eine Kreisbogenfigur umzusetzen. Es geschieht dieses nur aus Connivenz gegen unsere Gewöhnung, indem wir uns eine complexe Grösse gerne in der Gaussischen Weise durch die rechtwinklichen Coordinaten eines Punktes repräsentirt denken. Im Grunde giebt aber auch unsere Dreiecksfigur eine völlig zureichende geometrische Darstellung des Complexen, da doch jeder complexe Wert von ω einem ganz bestimmten Punkte im Innern des Kegelschnittes zugeordnet ist, nämlich demjenigen Punkte, von welchem die Tangente mit dem Parameter ω an den fundamentalen Kegelschnitt gelegt werden kann. Wir brauchen uns dieses Innere nur mit zwei Blättern überdeckt zu denken, um

denselben Vortheil zu haben, den wir durch die Unterscheidung der positiven und negativen Halbebene ω erreichen. Uebrigens ist dieses doppelt überdeckte Kegelschnittinnere nur ein specieller Fall der allgemeinen zu den ebenen algebraischen Curven gehörigen „projectiven" Riemann'schen Flächen, deren functionentheoretische Verwendung ich längst in Vorschlag gebracht habe. (Cfr. Vorl. über R. Fl. I pg 255).

Wir gehen nun zur Betrachtung der Modulfunctionen über. Zunächst genügt jede Modulfunction $\varphi(\omega)$ der Functionalgleichung:

$$\varphi(\omega) = \varphi\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right), \text{ wo } \alpha\delta-\beta\gamma = +1.$$

Daraus folgt: <u>Für unsere Modulfunctionen ist jeder Discontinuitätsbereich der Gruppe $\alpha\delta-\beta\gamma=+1$ Fundamentalraum</u>; d.h. die Modulfunctionen nehmen in jedem Discontinuitätsbereich der Gruppe dieselben Werte an, wie in jedem anderen. Ini's

Besondere nehmen sie auch in correspondirenden Randpunkten desselben Bereiches die gleichen Werte an. Gewöhnlich wählt man unter den sämmtlichen möglichen Fundamentalbereichen den auf der pg 331 gezeichneten aus. Derselbe besteht aus dem schraffirten Ausgangsdreieck von pg. 323 und dem längs der imaginären Axe sich anlegenden Nebendreiecke. Die Zuordnung der Randpunkte ist durch Pfeile angedeutet; sie wird durch die Substitutionen vermittelt: $\omega = \omega' + 1$ und $\omega' = -\frac{1}{\omega}$.

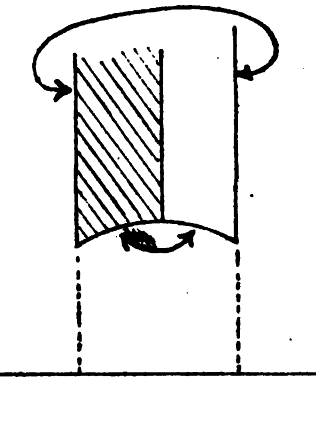
Unter den Modulfunctionen betrachten wir zunächst die Function $J(\omega)$ genauer. Wir deuten uns ihre Werte in einer J-Ebene und fragen nach der Beziehung zwischen dieser und dem Fundamentalbereich der ω-Ebene. Die Theorie der Modulfunctionen lehrt (vergl. M. F. I pg 114), dass diese Beziehung eine <u>eindeutig umkehrbare</u> ist, oder, anders ausgedrückt, <u>dass $J(\omega)$ jeden</u>

<u>seiner Werte im Fundamentalbereiche einmal und nur einmal annimmt.</u>

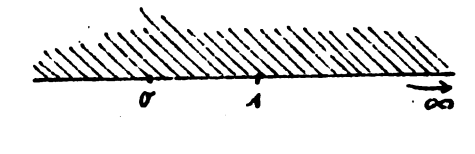
Wir vergleichen dieses Resultat mit dem, was wir früher über den Fundamentalraum der Gruppe $u' = u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ d. h. über das Periodenparallelogramm abgeleitet haben.

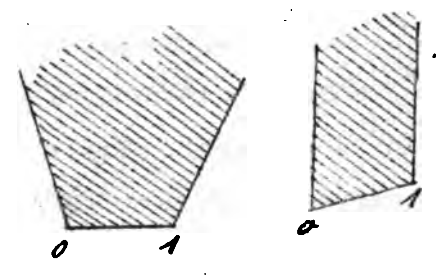
Wir sahen, dass dieses geradezu ein conformes Abbild der Riemann'schen Fläche (p, p') war. Hier können wir entsprechend sagen: <u>Der Fundamentalraum der ω-Ebene ist ein conformes Abbild der schlichten J-Ebene.</u>

Die Dinge liegen also hinsichtlich der Variabeln ω im Grunde einfacher, als hinsichtlich der Variabeln u. Speciell zeigt sich, dass das schraffirte Dreieck des Fundamentalbereiches ein conformes Abbild der positiven



J-Ebene ist, wobei den Punkten J = 0, 1, ∞ die Ecken des Kreisbogendreiecks entsprechen, nämlich bez. die Punkte, in denen die zusammenstossenden Seiten die Winkel $\pi/3$, $\pi/2$ und 0 bilden.





Wir können uns den Übergang von der positiven J-Ebene zu dem Kreisbogendreieck in der ω-Ebene wieder so denken, dass wir ihn als das Resultat einer gesetzmässigen continuirlichen Verzerrung ansehen, wie durch die nebenstehenden Figuren angedeutet wird.

Wir sprechen jetzt von Modulfunctionen im Allgemeinen. Wir definirten diese früher dadurch, dass wir sagten: es sind rationale Functionen von J. Dieses können wir auch so ausdrücken: die Modulfunctionen sind in der J-Ebene eindeutig und haben

nirgends einen wesentlich singulären Punkt. Wir geben nun die in Aussicht genommene independente Definition der Modulfunctionen, indem wir sie in der J-Ebene characterisiren. Wir sagen: Modulfunctionen sind solche eindeutige Functionen von ω, welche

1. die Functionalgleichung erfüllen

$$\varphi\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right)=\varphi(\omega),$$

und welche

2. im Innern des einzelnen Fundamentalbereiches relativ zu diesem Bereich keinen wesentlich singulären Punkt haben.

Der Ausdruck: relativ zum Fundamentalbereich muss dabei noch näher präcisirt werden. Er soll etwas Anderes bedeuten, wie wenn wir sagen würden: relativ zur ω-Ebene: und deckt sich mit ihm nur im Allgemeinen, nämlich nur in solchen Punkten, wo der Fundamentalbereich selbst keine Besonderheiten aufweist. Um seine Bedeutung auch für die

Ecken festzulegen, müssen wir auf die J-Ebene zurückgreifen, in welcher ja die Modulfunctionen schlechtweg keine wesentliche singuläre Stelle haben sollten. Nun bildet sich die Umgebung der Punkte $J=0$ und $J=1$ zwar nicht conform, aber doch mit rationalem Winkelvergrösserungsverhältnis auf die ω-Ebene ab. Daraus folgt, dass auch in den Ecken unseres Dreiecks mit den Winkeln $\pi/3$ und $\pi/2$ das Auftreten von wesentlichen Singularitäten relativ zur ω-Ebene schlechtweg ausgeschlossen werden muss. Anders verhält es sich mit derjenigen Ecke, welche sich in's Unendliche erstreckt.

Wir fragen zunächst, wie sich J selbst in dieser Ecke verhält; gestattet J hier eine Entwickelung nach aufsteigenden Potenzen von $\frac{1}{\omega}$ mit nur einer endlichen Zahl negativer Potenzen? Das ist nicht der Fall, vielmehr hat J, als Function von ω, bei $\omega=\infty$ eine wesentlich singuläre Stelle. Man beherrscht aber diese

Singularität, indem man sie durch Einführung einer neuen Variabeln fortschaffen kann.

Diese Hülfsvariable ist

$$r = e^{2\pi i \omega};$$

(es ist dieselbe Grösse, welche in der Jacobi'schen Bezeichnungsweise q^2, in der Weierstrass'ischen h^2 heisst.) Was zunächst die Abbildung betrifft, welche in der ω-Ebene ensteht, wenn r unter Vermeidung eines von $r = 0$ bei $r = \infty$ längs der negativen reellen Axe laufenden Schnittes alle seine Werte einmal durchläuft, so besteht diese aus einem Parallelstreifen, welcher durch die in den Punkten $\omega = \pm \frac{1}{2}$ parallel zur imaginären Axe gezogenen Geraden begrenzt wird, u. zw. entspricht der in der positiven ω-Ebene gelegene Halb-

streifen dem Inneren der in der negativen ω-Ebene gelegene Halbstreifen dem Aeusseren des Einheitskreises in der r-Ebene. Das Unendliche des positiven Halbstreifens entspricht dem Mittelpuncte des Einheitskreises, d. h. dem Werte $r = 0$.

Man kann nun $J(\omega)$ mittelst der Variabeln r in eine Reihe entwickeln, welche folgendermassen lautet (vergl. M. F. I pg 154):

$$J = \frac{1}{1728\, r} + \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} a_\nu r^\nu .$$

Aus dieser Reihe erkennen wir zweierlei: erstlich, dass J für $r = 0$ unendlich wird, und zweitens, dass es, als Function von r aufgefasst, nicht wesentlich singulär ist.

<u>Wir verlangen nun von den Modulfunctionen überhaupt, dass sie an der Stelle $\omega = \infty$, als Functionen von r aufgefasst, nicht wesentlich singulär sein sollen,</u> mithin nach aufsteigenden Potenzen von r entwickelt, nur eine endliche

Anzahl von negativen Potenzen von r besitzen dürfen. Dieses meinen wir, wenn wir sagen: die Modulfunctionen sollen, „relativ zum Fundamentalbereiche", auch an der Stelle $w = \infty$ keine wesentliche Singularität haben. Uebrigens convergirt die angegebene Reihe für J für alle Werthe $|\tau| < 1$ und gibt damit eine Darstellung des J in der ganzen positiven Halbebene w.

Frei. den 21. II. Längs der <u>reellen Axe</u> wird das Verhalten der Modulfunctionen ein sehr eigentümliches. Wenn wir nämlich unsere Einteilung der w-Ebene nach der reellen Axe hin vervollständigen wollen, so erkennen wir, dass sich hier die Kreisbogendreiecke unbegrenzt häufen. Daraus folgt, dass die Modulfunction hier jeden Wert an unendlich vielen unmittelbar benachbarten Stellen annimmt. Jeder Punkt der reellen Axe wird daher ein wesentlich singulärer Punkt der Function. Man kann die Frage aufwerfen: Welchen Wert nimmt denn eigent-

lich die Modulfunction an einem bestimmten Punkte der reellen Axe selbst an? Dabei müssen wir zwischen den rationalen und den irrationalen Punkten unterscheiden. In jeden rationalen Punkt läuft ein Kreisbogendreieck (und sogar eine unendliche Zahl solcher Dreiecke) je mit einer Spitze aus. Nähern wir uns einem rationalen Punkt, indem wir senkrecht auf die reelle Axe zuschreiten, so bleiben wir in einem bestimmten Fundamentalbereiche; wir können daher auch von einem bestimmten Werte sprechen, welchen die Modulfunction bei der bestimmten Art der Annäherung in diesem Punkte annimmt. Dagegen passiren wir, wenn wir auf einen irrationalen Punkt in irgend einer Richtung zuschreiten, fortgesetzt neue Dreiecke. Es gibt daher keinen bestimmten Grenzwert, dem die Function in einem solchen Punkte zustrebt; die Function bleibt hier völlig unbestimmt.

Dies hat im Sinne der Weierstrass-

schen Functionentheorie zur Folge, dass man die Modulfunctionen über die reelle Axe nicht fortsetzen kann; sie bilden historisch das erste Beispiel einer Function mit „natürlicher Grenze".

Allerdings können wir, wenn uns irgend ein Ausdruck zur Berechnung einer Modulfunction gegeben ist, daraus möglicherweise ebensowohl Werte für ein ω der positiven, wie für eins der negativen Halbebene ableiten. So ist es z. B. für $J = \frac{g_2^3}{\Delta}$, wenn wir für g_2^3 und $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ die oben gegebenen Partialbruchreihen eintragen. Die so entstehenden Werte von J gehören aber im Sinne der modernen Functionentheorie zu zwei ganz verschiedenen Functionen, welche nicht durch analytische Fortsetzung unter einander zusammenhängen. Hiernach stellt das Symbol $F(\omega)$ zwei verschiedene Functionen dar, von denen die eine in der positiven, die andere in der negativen Halbebene definirt ist. Ana-

log ist es mit allen unseren Modulfunctionen. Wir werden weiterhin unter $\mathcal{F}(\omega)$ immer die erstere von beiden verstehen, also voraussetzen, dass $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ einen positiv-imaginären Bestandtheil hat. Dies bringt dann mit sich, dass wir uns auf solche $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$ Substitutionen beschränken müssen, deren Determinante $= +1$, denn die anderen vertauschen die beiden Halbebenen a mit einander.

Wir beschäftigen uns nun mit den <u>Modulformen</u>. Diese sollten rationale Functionen von g_2 und g_3 sein, welche homogen sind, wobei wir g_2 das Gewicht -4 und g_3 das Gewicht -6 beizulegen hatten. g_2 und g_3 selbst, sowie die Discriminante Δ sind die einfachsten Modulformen. Ihre Darstellung in den Variabeln ω_1, ω_2 wurde pg. 306 mitgeteilt.

Wenn wir Functionen der beiden unabhängigen Variabeln ω_1 und ω_2 betrachten wollen, so liegt es zuvörderst nahe, die Variabeln in R_4

zu deuten. Hinsichtlich der Substitutionengruppe:

$$\omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2$$
$$\omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = +1$$

zerlegt sich dieser R_4^c in eine Reihe von Discontinuitäts-bereichen. Es wäre nun die Frage, wie man die Modulformen und in's Besondere, wie man g_2 und g_3 functionentheoretisch durch ihr Verhalten in einem einzelnen dieser Bereiche characterisiren könnte. Dieser directe Weg zum Studium der Modulformen ist indessen bisher nicht mit Erfolg eingeschlagen worden; er scheint erhebliche Schwierigkeiten zu haben. Dasselbe ist aber auch nicht nöthig, da wir nur homogene Functionen von ω_1, ω_2 suchen. In Folge dessen können wir die ganze Untersuchung indirect in die ω-Ebene selbst verlegen. Wir geben zunächst ein Verfahren an, durch welches man von $J(\omega)$ zu den Formen g_2 und g_3 aufsteigen kann.

Zu dem Zweck betrachten wir den Differentialquotienten $\frac{d\,\mathfrak{J}(\omega)}{d\omega}$ und sehen zu, wie sich derselbe bei den Substitutionen $\omega' = \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ verhält. Zunächst haben wir die Gleichung:

$$\mathfrak{J}(\omega') = \mathfrak{J}(\omega).$$

Durch Differentiation folgt, da $\frac{d\omega'}{d\omega} = \left(\frac{1}{\gamma\omega+\delta}\right)^2$ ist:

$$\frac{d\,\mathfrak{J}(\omega')}{d\omega'}\,\frac{1}{(\gamma\omega+\delta)^2} = \frac{d\,\mathfrak{J}(\omega)}{d(\omega)}.$$

Multipliciren wir hier mit $\frac{1}{\omega_2^2}$ und berücksichtigen, dass $\omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2$, so haben wir

$$\frac{d\,\mathfrak{J}(\omega')}{d\omega'}\;\frac{1}{\omega_2'^2} = \frac{d\,\mathfrak{J}(\omega)}{d\omega}\cdot\frac{1}{\omega_2^2}$$

Wir sind somit zu einer Form

$\mathfrak{C}(\omega_1, \omega_2) = \frac{d\mathfrak{J}}{d\omega}\;\frac{1}{\omega_2^2}$ gekommen, welche homogen vom -2ten Grade in ω_1, ω_2 ist und welche bei den Substitutionen von pg 341 gänzlich ungeändert bleibt. <u>Dieses $\mathfrak{C}$ wird daher als Modulform zu bezeichnen sein.</u>

Es gelingt nun, mit Hülfe dieser

Form $\mathfrak{C}$ und der Function J die anderen Modulformen zusammenzusetzen, wie die folgenden Formeln zeigen:

$$g_2 = \frac{\pi^2}{3J(1-J)}\,\mathfrak{C}^2$$

$$g_3 = \frac{\pi^3 i}{27 J^2(1-J)}\,\mathfrak{C}^3$$

$$\Delta = \frac{\pi^4}{27 J^4(1-J)^3}\,\mathfrak{C}^6.$$

(vergl. Hierzu M. F. I pg).

Aus diesen Formeln können wir das Verhalten von g_2, g_3 und Δ bei beliebigen Werten von ω_1 und ω_2 ablesen, wobei wir nur, wie es bei homogenen Variabeln stets geschehen muss, das gleichzeitige Verschwinden sowie das gleichzeitige Unendlichwerden von ω_1 und ω_2 ausschliessen. Zunächst zeigt sich, dass alle 3 Grössen im Innern der ω-Halbebene nirgends unendlich werden. Denn die Werte $J=0$ und $J=1$ sind, wie aus der Lagerung unserer Dreiecksteilung hervorgeht, dreifache bez. zweifache

Werte der Function $J(\omega)$. Daher verschwindet der Differentialquotient und also auch $\varphi(\omega)$ an diesen Stellen von der zweiten bez. ersten Ordnung. Das Nullwerden des Nenners wird daher bei unseren Ausdrücken für g_2, g_3, Δ durch das Nullwerden des Zählers aufgehoben, ja es bleibt für g_2 und g_3 bei $J = 0, 1$ noch je eine einfache Nullstelle übrig. Man erkennt auch aus der Dreiecksteilung, dass die genannten Stellen (die Ecken der Dreiecksteilung) die einzigen Nullstellen von $\varphi(\omega)$ im Innern der Halbebene sind. Daraus ergiebt sich die folgende Zusammenstellung (NB. für das Innere der Halbebene):

g_2 wird Null in den Ecken vom Winkel $\pi/3$ und nur in diesen

g_3 " " " " " vom Winkel $\pi/2$ und nur in diesen

Δ wird nirgends Null.

Zugleich sind sämmtliche Nullstellen von g_2 und g_3 einfache Nullstellen.

Wir orientiren uns ferner über das

Verhalten unserer Formen in den rationalen Punkten der reellen Axe. Dabei können wir uns auf den Punkt $\omega = \infty$ oder $\omega_2 = 0$ beschränken, weil jeder andere rationale Punkt $\omega = \gamma/\delta$ durch eine Substitution unserer Gruppe nach dem Punkte $\omega = \infty$ transformirt werden kann, wobei die Modulform ungeändert bleibt. Wir führen, ebenso wie bei der Untersuchung von J im Punkte $\omega = \infty$ die Hülfvariable $r = e^{2\pi i \omega}$ ein; man kann dann folgende Reihenentwikkelungen aufstellen (vergl. M. F. I pg 153 und 154).

$$g_2\left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^4 = \frac{1}{12} + 20 \sum \frac{m^3 r^m}{1-r^m}$$

$$g_3\left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^6 = \frac{1}{216} - \frac{7}{3} \sum \frac{m^5 r^m}{1-r^m}$$

$$\Delta\left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^{12} = r\,\Pi'\,(1-r^m)^{24}$$

Do. den 27. II. Die rechten Seiten dieser Ausdrücke können wir uns für die Umgebung der Stelle $\omega_1 = 0$ oder, was dasselbe ist, der Stelle $r = 0$ in convergente Reihen nach steigenden Po=

tenzen von r umgeordnet denken; wir bezeichnen sie dementsprechend mit $\mathfrak{P}(r)$ und zwar bleiben diese $\mathfrak{P}(r)$ bei $r=0$ endlich. Dagegen werden die Grössen g_2, g_3, Δ selbst bei der Annäherung an den Punkt $\omega_2 = 0$ unendlich gross u. zw. wird die Art des Unendlich-Werdens allgemein zu reden gemessen durch einen Ausdruck von der Form

$$\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^r \mathfrak{P}(r).$$

Ganz analoges gilt von jedem rationalen Punkte $\gamma\omega_1 + \delta\omega_2 = 0$ auf der reellen Axe, wie wir nicht ausführen, da jeder solche Punkt durch eine Substitution $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ nach ∞ geworfen werden kann.

Diese Eigenschaft überträgt sich sofort auf die Modulformen überhaupt, welche ja rationale Functionen von g_2 und g_3 sein sollten; auch diese verhalten sich bei $\omega_2 = 0$ wie $\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^r \mathfrak{P}(r)$, wo nun aber $\mathfrak{P}(r)$ eine endliche Zahl negativer Potenzen enthalten kann. Ins Besondere werden wir die ganzen Modulformen bevorzugen, welche als

ganze rationale Functionen von g_2 und g_3 definirt sind. Wir sind jetzt in der Lage, dieselben independent durch ihr Verhalten im Fundamentalbereiche zu charakterisiren, ohne auf ihre Darstellung durch g_2 und g_3 zurückzugreifen. Unsere Definition wird lauten:

1. Die ganzen Modulformen $\varphi(\omega_1, \omega_2)$ sind homogene Functionen von ω_1 und ω_2. (Ihr Grad sei $-r$.)

2. Sie erfüllen die Functionalgleichung:

$$\varphi(\alpha\omega_1+\beta\omega_2, \gamma\omega_1+\delta\omega_2) = \varphi(\omega_1, \omega_2).$$

3. Sie sind im Innern der positiven ω-Halbebene nirgends singulär, also überall endlich.

4. Sie verhalten sich bei der Annäherung an den unendlich fernen Zipfel des Fundamentalbereiches wie

$$\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^r \mathfrak{P}(r),$$

wo in $\mathfrak{P}(r)$ nur positive Potenzen von r auftreten.

Umgekehrt schliesst man, dass eine Function, welche diesen Bedin-

gungen genügt, eine ganze rationale Function von g_2 und g_3 ist. Es deckt sich also die neue Definition mit der früheren. Legt man Wert darauf, dass in den Reihenentwickelungen nach r nur ganze Zahlen als Coefficienten auftreten, so wird man nicht die Grössen g_2, g_3 selbst, sondern $\gamma_2 = 12 g_2$ und $\gamma_3 = 216 g_3$ zu Grunde legen. Die Discriminante Δ erfüllt die Forderung ganzzahliger Coefficienten von selbst; sie ist mit γ_2 und γ_3 durch die Gleichung verbunden: $1728\Delta = \gamma_2^3 - \gamma_3^2$. Von diesem Standpunkte aus empfiehlt es sich auch statt der absoluten Invariante J die Function $j = \frac{\gamma_2^3}{\Delta} = 1728 J$ einzuführen. Die *ganzen ganzzahligen Modulformen* im Allgemeinen werden wieder durch die Bedingungen 1) bis 4) definirt, wobei der 4. Bedingung hinzuzufügen ist, dass in der Reihe $P(r)$ nur ganzzahlige Coefficienten auftreten. Man erkennt, dass diese ganzen ganzzahligen Modulformen ganze ganzzahlige Functionen von γ_2, γ_3 und Δ sind (welch'

letzteres sich hier selbständig neben f_2 und f_3 stellt, da es sich aus f_2 und f_3 nur mit dem Nenner 1728 zusammensetzen lässt.)

Wir gehen nun auf die Bedeutung der elliptischen Functionen für unsern eigentlichen Gegenstand, für die Zahlentheorie ein. Es handelt sich ausschliesslich um negative Discriminanten. Wir unterscheiden dabei drei Stufen unserer bisherigen arithmetischen Entwickelungen:

1. Auf der obersten Stufe beschäftigen wir uns mit den Gitterzahlen, d.h. mit gewissen complexen Zahlen, welche den Eckpunkten eines beliebigen Parallelgitters in der Gaussischen Ebene zugeordnet sind. Sind ω_1 und ω_2 diejenigen complexen Zahlen, welche den Endpunkten der von 0 auslaufenden Seiten des ersten Parallelogrammes zukommen, so ist die allgemeine Form der Gitterzahlen

$$\omega_1 x + \omega_2 y.$$

Die Bezeichnung wird praktischer Weise von vorneherein so eingerichtet, dass $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ einen positiven imaginären Bestandtheil hat. Da die Definition der Gitterzahlen an die Punkte des Gitters, nicht an die Parallellinien desselben anknüpft, so wird man alle zu demselben Punktgitter gehörige Parallelgitter als gleichwerthig ansehen. Dementspricht dass man alle Grössen ω_1', ω_2' als gleichwerthig ansieht, welche mit ω_1 ω_2 durch die Substitutionen verbunden sind.

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \alpha\omega_1' + \beta\omega_2' \\ \omega_2 &= \gamma\omega_1' + \delta\omega_2' \end{aligned}\right\} (\alpha\delta - \beta\gamma) = +1,$$

wobei wir uns auf die Det. +1 beschränken, damit die Verabredung betr. den imaginären Teil von ω aufrecht erhalten bleibt.

2. Auf der zweiten Stufe betrachten wir die definiten <u>quadratischen Formen</u> welche als Normen der Gitterzahlen definirt sind:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = (\omega_1 x + \omega_2 y)(\bar{\omega}_1 x + \bar{\omega}_2 y)$$

Es sind dies insbesondere die positiven quadratischen Formen.

Den vorstehenden Substitutionsformeln entsprechend interessirt uns dabei weniger die einzelne Form, als die Classe aequivalenter Formen.

3. Auf der dritten Stufe untersuchen wir nicht die quadratische Form, sondern die quadratische Gleichung.

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0 \text{ bez. } a\omega^2 + b\omega + c = 0.$$

Bei diesem Standpunkte werden nicht die Zahlen a, b, c selbst, sondern nur die Verhältnisse $a : b : c$ in Betracht gezogen.

Bei 1. kommt von unserem geometrischen Bilde die ganze Figur des Punktgitters nach Lage und Grösse zur Geltung. Bei 2. kommt es nur auf die Gestalt, nicht auf die Orientirung des Gitters an. Wenn wir nämlich das Punktgitter um O beliebig drehen, also $e^{i\varphi}(\omega_1 x + \omega_2 y)$ an Stelle von $\omega_1 x + \omega_2 y$ und entsprechend $e^{-i\varphi}(\bar{\omega}_1 x + \bar{\omega}_2 y)$ an Stelle

von $\omega_1 x + \omega_2 y$ setzen, so hat dieses auf die <u>Norm</u> der Gitterzahlen keinen Einfluss. <u>Bei 3. bleibt ausser der Lage auch die absolute Grösse der Gittermaschen willkürlich.</u> Wenn wir nämlich die ganze Gitterfigur in dem Verhältnisse ϱ verkleinern, so werden die Zahlen a, b, c durch $\varrho a, \varrho b, \varrho c$ ersetzt. Dadurch wird aber die <u>Gleichung</u> $a\omega^2 + b\omega + c = 0$ nicht geändert.

Andrerseits gehört zu jedem Gitter ein System elliptischer Functionen mit den Perioden ω_1, ω_2, welches ungeändert bleibt, wenn wir ω_1, ω_2 durch ein aequivalentes Paar ω_1', ω_2' ersetzen. Wir behaupten aber mehr. Die Gleichheit gewisser elliptischer Functionen zieht die Aequivalenz der Perioden nach sich. Die elliptischen Functionen versehen uns so mit den vollen <u>analytischen Invarianten</u> unserer zahlentheoretischen Gebilde. Des Genaueren stellt sich die Sache so: <u>Von dem Standpunkte 1. sind g_2 und g_3 die vollen Invarianten des Punktgitters</u>, so dass, wenn g_2 und g_3, gebildet

für 2 Periodenpaare, übereinstimmen, die zu den Periodenpaaren gehörigen Punktgitter nach Gestalt und Lage identisch sind.

Auf dem Standpunkte 2) sind ausser $J = \frac{g_2^3}{\Delta}$ Norm (g_2) und Norm (g_3) diese Invarianten. Dass durch die Gleichheit der absoluten Invarianten sowie der Normen die Orientirung der Punktgitter noch nicht festgelegt sein kann, ist von vornherein klar. Wenn wir nämlich das Punktgitter um ϑ drehen, also ω_1 und ω_2 durch $e^{i\vartheta}\omega_1$ und $e^{i\vartheta}\omega_2$ ersetzen, so wird wegen der Homogenitätseigenschaft von g_2 und g_3 sowohl J wie Ng_2 und Ng_3 nicht verändert.

3. Von dem dritten Standpunkte aus ist $J(\omega)$ die einzige Invariante in dem Sinne, dass die Gleichung $J(\omega) = J(\omega')$ zur Folge hat, dass ω und ω' Wurzeln von zwei aequivalenten quadratischen Gleichungen sind, dass also

$$\omega = \frac{\alpha\omega' + \beta}{\gamma\omega' + \delta}.$$

Beim Beweise dieser Behauptungen beginnen wir mit dem Falle 3). Wir wissen, dass $F(\omega)$ in seinem Fundamentalbereiche jeden Werth nur einmal annimmt. In der ω-Ebene hat daher $F(\omega)$ denselben Werth nur für solche Punkte, welche an aequivalenten Stellen verschiedener Fundamentalbereiche liegen. Aus der Gleichung $F(\omega) = F(\omega')$ folgt also $\omega = \frac{\alpha\omega' + \beta}{\gamma\omega' + \delta}$. Die Punktgitter sind ähnlich, aber nicht nothwendig ähnlich gelegen und gleich. Darauf stützen wir uns beim Beweise der Behauptungen ad 2) und 1). Wir haben jedenfalls: $F\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) = F\left(\frac{\omega_1'}{\omega_2'}\right)$. Hieraus ergiebt sich, wie wir sahen:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\alpha\omega_1' + \beta\omega_2'}{\gamma\omega_1' + \delta\omega_2'}$$

oder, homogen geschrieben:

$$\varrho\,\omega_1 = \alpha\omega_1' + \beta\omega_2'$$
$$\varrho\,\omega_2 = \gamma\omega_1' + \delta\omega_2' \,.$$

Nun ist aber

$$g_2(\varrho\,\omega_1, \varrho\,\omega_2) = \varrho^{-4} g_2(\omega_1, \omega_2)$$

und

$$g_3(\rho\omega_1, \rho\omega_2) = \rho^{-6} g_3(\omega_1, \omega_2);$$

ferner haben wir

$$g_2(\omega_1', \omega_2') = g_2(\alpha\omega_1' + \beta\omega_2', \gamma\omega_1' + \delta\omega_2') = g_2(\rho\omega_1, \rho\omega_2),$$

also

$$g_2(\omega_1'; \omega_2') = \rho^{-4} g_2(\omega_1, \omega_2)$$

und ebenso

$$g_3(\omega_1', \omega_2') = \rho^{-6} g_3(\omega_1, \omega_2).$$

Im Falle 1.) lautet die Voraussetzung $g_2(\omega_1' \omega_2') = g_2(\omega_1 \omega_2)$ und $g_3(\omega_1' \omega_2') = g_3(\omega_1, \omega_2)$. Dann ergiebt sich

$$N(\rho^2) = 1 \text{ oder } \rho = \pm 1.$$

In diesem Falle sind die Periodenpaare direct aequivalent, u. zw., wenn $\rho = +1$, mittelst der Substitution $\binom{\alpha\ \beta}{\gamma\ \delta}$, wenn $\rho = -1$, mittelst $\binom{-\alpha, -\beta}{-\gamma, -\delta}$. Die Punktgitter sind also völlig identisch.

Im Falle 2) setzen wir nun voraus $Ng_2(\omega_1', \omega_2') = Ng_2(\omega_1, \omega_2)$ und $Ng_3(\omega_1', \omega_2') = Ng_3(\omega_1, \omega_2)$. Daraus folgt mit Rücksicht auf das Vorstehende:

$N\varrho^2 = 1$, also $\varrho = e^{i\varphi}$.

In diesem Falle sind die Periodenpaare ω_1, ω_2 und ω_1', ω_2' also bis auf die Orientirung aequivalent; Die Punktgitter sind der Gestalt nach identisch, nur der Lage nach sind sie eventl. gegen einander gedreht.

Wie man sieht, ist der eigentliche Kernpunkt dieser fundamentalen Sätze, dass J im Fundamentalbereiche der ω - Ebene jeden Werth gerade <u>einmal</u> annimmt (dass dieser Fundamentalbereich direct eine eindeutige Abbildung der J-Ebene ist).

Frei. d. 28.II. Wir haben uns jetzt mit derjenigen systematischen Auffassung der elliptischen Functionen vertraut zu machen, welche in den Vorlesungen über Modulfunctionen entwickelt ist.

Die bisher betrachteten elliptischen Functionen waren definirt als Invarianten der Gruppe

$$\begin{cases} u' = u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \\ \omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 \\ \omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2, \end{cases}$$

welche relativ zu dem Discontinuitätsbereich der Gruppe keine wesentlichen Singularitäten besitzen. Wir erweitern jetzt die Theorie dahin, dass wir auch die Untergruppen dieser Gesammtgruppe in Betracht ziehen. Dabei aber soll es sich nur um Untergruppen von endlichem Index handeln. Wir suchen dann die eindeutigen, homogenen Invarianten dieser Untergruppen auf, welche relativ zu dem betr. Discontinuitätsbereiche keine wesentliche Singularität besitzen. Diese Invarianten sind elliptische Functionen im weiteren Sinne. Während die bisherigen Functionen rationale Functionen von $\wp$, $\wp'$, g_2 und g_3 waren, erweisen sich diese neuen Functionen als algebraisch von $\wp$, $\wp'$, g_2 und g_3 abhängig. Damit soll natürlich nicht gesagt sein, dass alle algebraischen Functionen

dieser Grössen elliptische Functionen seien, vielmehr entsteht die Frage, welche algebraischen Functionen von p, p', g_2 und g_3 als Invarianten einer unserer Untergruppen erhalten werden können. Wiederum kann man die ganzen algebraischen Functionen bevorzugen und kann die Forderung hinzufügen, dass nur ganzzahlige Coefficienten in ihren Entwickelungen auftreten sollen.

Die Theorie hat nun der Reihe nach folgende Aufgaben zu erledigen:

1. Alle Untergruppen der ternären Gruppe aufzuzählen.

2. Die zugehörigen Discontinuitätsbereiche anzugeben.

3. Die Functionen zu bilden, welche die Discontinuitätsbereiche zu Fundamentalbereichen haben und relativ zu denselben keine wesentlichen Singularitäten besitzen.

4. Die algebraischen Beziehungen zu untersuchen, in welchen diese Functionen zu den p, p', g_2 g_3 stehen.

Ich will mich hier, wie in den "Vorle-

sungen" geschieht einen Augenblick auf Modulfunctionen, also die binäre Gruppe der ω - Substitutionen beschränken. In dieser Hinsicht werde etwa Folgendes angeführt:

Von den Untergruppen sind die "Congruenzgruppen" am besten untersucht, das sind solche, welche aus der Gruppe

$$\omega_1 = \alpha\,\omega_1' + \beta\,\omega_2'$$
$$\omega_2 = \gamma\,\omega_1' + \delta\,\omega_2'$$

durch Congruenzen ausgeschieden werden, denen man die Coefficienten ihrer Substitutionen unterwirft. Speciell bezeichnet man als "Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe" diejenige Gruppe deren Substitutionen modulo n der Identität congruent sind. Die Coefficienten ihrer Substitutionen genügen den Bedingungen

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha \equiv 1\,, & \beta \equiv 0 \\ \gamma \equiv 0\,, & \delta \equiv 1 \end{array}\right\} (\mathrm{mod}\ n).$$

Ein Beispiel für eine umfassendere

Congruenzgruppe n^{ten} Stufe liefert die Bedingung:

$$\beta \equiv 0 \pmod{n}.$$

In der That überzeugen wir uns leicht, dass die so characterisirten Substitutionen allemal eine Gruppe bilden.

Die zu Congruenzgruppen gehörigen Invarianten nennen wir Modulfunktionen n^{ter} Stufe.

Wollen wir nun umgekehrt auf die Substitutionen des u eingehen:

$$u' = u + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2,$$

indem wir die ω Substitutionen bei Seite lassen.

Hier sind die Untergruppen besonders leicht anzugeben. Sie ergeben sich, indem wir ω_1, ω_2 durch irgend welche ganzzahligen Combinationen Ω_1, Ω_2 ersetzen und enthalten die Substitutionen:

$$u' = u + m_1 \Omega_1 + m_2 \Omega_2,$$

wo

$$\left.\begin{aligned} \Omega_1 &= a\omega_1 + b\omega_2 \\ \Omega_2 &= c\omega_1 + d\omega_2 \end{aligned}\right\}$$ (a, b, c, d ganze Zahlen von irgend welcher Determinante $ad - bc = N$).

Der Discontinuitätsbereich besteht wieder aus einem Parallelogramme; A_1, A_2 sind die Ecken des Parallelogrammes. Die Gesammtheit der Discontinuitätsbereiche liefert wieder eine Gittertheilung der Ebene, welche, wie wir uns ausdrücken, der ursprünglichen Gittertheilung eingelagert ist. Das einzelne Elementarparallelogramm des neuen Gitters ist N-mal so gross, wie das des alten. Mit $P\ P'\ G_2\ G_3$ bezeichnen wir solche Functionen, welche zu dem neuen Gitter in derselben Beziehung stehen, wie $p\ p'\ g_2\ g_3$ zu dem alten. Man wird dann nach der algebraischen Abhängigkeit fragen, welche $P, P' \ldots$ u. $p, p' \ldots$ verknüpft. Diese Frage nennt man das <u>allgemeine Transformationsproblem N^{ter} Ordnung.</u>

Besondere Fälle des allgemeinen Problems ergeben sich wenn die Zahlen a, b, c, d gemeinsame Theiler besitzen. Die äusserste Specialisirung ist die, dass wir einen Theiler n

herausheben können:

$$\Omega_1 = n(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2)$$

$$\Omega_2 = n(\gamma\omega_1 + \delta\omega_2),$$

von der Beschaffenheit, dass wieder $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ wird. Dann ist gleichzeitig $N = n^2$. Statt der vorstehenden können wir dann ebensogut die mit ihr aequivalente Transformation betrachten:

$$\left.\begin{aligned} \Omega_1 &= n\,\omega_1 \\ \Omega_2 &= n\,\omega_2 \end{aligned}\right\}.$$

Diesen speciellen Fall bezeichnet man als Multiplication der Perioden.

Bei der Multiplication haben wir mit Rücksicht auf die Homogenität der elliptischen Functionen:

$$\mathcal{P} = p(u, n\omega_1, n\omega_2) = \frac{1}{n^2}\, p\left(\frac{u}{n}, \omega_1, \omega_2\right)$$

$$\mathcal{P}' = p'(u, n\omega_1, n\omega_2) = \frac{1}{n^3}\, p'\left(\frac{u}{n}, \omega_1, \omega_2\right)$$

$$G_2 = g_2(n\omega_1, n\omega_2) = \frac{1}{n^4}\, G_2(\omega_1, \omega_2)$$

$$G_3 = g_3(n\omega_1 + n\omega_2) = \frac{1}{n^6}\, G_3(\omega_1, \omega_2).$$

Bei der Multiplication stimmen also bis auf einen Zahlenfactor $\frac{1}{n^r}$ die G_2, G_3 mit den g_2, g_3 direct überein und die P, P' mit den p, p', gebildet für ein durch n getheiltes Argument.

Die Functionen $p(n), p'(n)$ sind nicht nur in dem Fundamentalbereiche ω_1, ω_2 sondern auch in dem Bereiche Ω_1, Ω_2 elliptische Functionen, und lassen sich als solche durch die einfachsten zu diesem Bereiche gehörigen Functionen, d. i. durch P und P' rational darstellen. Man kommt dann zu Formeln

$$(p, p') = \text{Rat}\,(P, P'),$$

welche man „Multiplicationsformeln" nennt. Umgekehrt stellen sich P und P' algebraisch durch p und p' dar. Diese umgekehrte Behandlung nennt man die <u>Theilung der elliptischen Functionen</u>. Analog stellt sich neben die vorhin betrachtete <u>directe</u> Transformation der elliptischen Functionen die <u>inverse</u> Trans-

formation. Bei gegebenem p und p' sind P und P' n^2-deutig bestimmt. Ist nämlich

$$P_0 = \frac{1}{n^2}\, p(u_0, \omega_1, \omega_2), \quad P_0' = \frac{1}{n^3}\, p'(u_0, \omega_1, \omega_2)$$

ein Werthepaar, welches zu den vorgegebenen Werthen von p und p' gehört, so erhalten wir hieraus alle unterschiedenen Werthepaare P, P', indem wir bilden

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{1}{n^2}\, p\left(u_0 + \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}, \omega_1, \omega_2\right) \\ P' &= \frac{1}{n^3}\, p'\left(u_0 + \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}, \omega_1, \omega_2\right) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \lambda &= 0, 1, \ldots n-1 \\ \mu &= 0, 1, \ldots n-1. \end{aligned}$$

Diese Werthepaare sind in der That alle von einander verschieden und liefern bei der Multiplication mit n alle dieselben Werte von p und p', wie P_0 und P_0'. Es sind auch die einzigen Wertepaare von dieser Eigenschaft, wie daraus hervorgeht, dass jedes Paar (p, p') im Fundamentalbereiche nur einmal vorkommt.

Hier ist nun leicht zu sehen, dass das Teilungsproblem mit der vor-

hin eingeführten Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe der ω_1, ω_2 zusammenhängt. Verlangen wir nämlich alle Substitutionen $\omega_1 = \alpha\omega_1' + \beta\omega_2'$, $\omega_2 = \gamma\omega_1' + \delta\omega_2'$, $(\alpha\delta - \beta\gamma = +1)$ zu bestimmen, bei denen die sämmtlichen voraufgeführten Werte von P und P' ungeändert bleiben, so kommen wir direct zu

$$\left.\begin{array}{l}\alpha \equiv 1, \beta \equiv 0,\\ \gamma \equiv 0, \delta \equiv 1.\end{array}\right\} (\text{mod. } n),$$

d. h. eben zur Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe. Unsere sämmtlichen P, P' sind also Functionen der n^{ten} Stufe.

Diese wenigen Erläuterungen mögen genügen, um in die Fragestellung einzuführen; das Nähere mögen Sie in den „Vorlesungen" und anderwärts nachstudieren.

Ich gebe nun einige Resultate, welche man für niedere Stufenzahlen erhalten hat. Zunächst im Anschlusse an die Weierstraß'sche

Theorie:

1. Modulformen der zweiten Stufe erhält man hier aus der Gleichung

$$4p^3 - g_2 p - g_3 = 0,$$

nämlich deren Wurzeln e_1, e_2, e_3. Man pflegt insbesondere die Differenzen $e_i - e_k$ zu betrachten.

Diese e_i, bez. $e_i - e_k$ sind, wie man aus ihrem Zusammenhange mit den g_2, g_3 ersieht, von der -2ten Dimension. Eine Modulfunction der zweiten Stufe erhält man daraus durch Quotientenbildung. Diese Modulfunction ist der Legendre'sche Modul, oder vielmehr das Quadrat desselben:

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}.$$

Geometrisch bedeutet k^2 das Doppelverhältnis der vier Verzweigungspunkte $e_1\ e_2\ e_3\ \infty$ auf der Riemann'schen Fläche (p, p').

An diese Bedeutung soll die Bezeichnung λ welche in den „Modulf." für k^2 benutzt wird, ein-

nern. Bei den Vertauschungen der vier Verzweigungspunkte nimmt das Doppelverhältnis im Ganzen 6 verschiedene Werte an. Der einzelnen Vertauschung entspricht eine Transformation erster Ordnung der Perioden, also eine Substitution aus unserer Gruppe $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$. Gegenüber den Substitutionen der Gesamtgruppe ist daher der Legendre'sche Modul 6 verschiedener Werte fähig, was mit dem Index (6) der Hauptcongruenzgruppe 2ter Stufe übereinstimmt.

2. In der Weierstraß'schen Theorie kommen ferner Ausdrücke vor von der Form:

$$\sqrt{\wp(u) - e_\lambda}\,.$$

Dieselben sind, ebenso wie $\wp(u)$, eindeutige doppeltperiodische Funktionen von u; ihr Periodenparallelogramm ist aber doppelt so gross wie das ursprüngliche. (Beispielsweise gehört zu

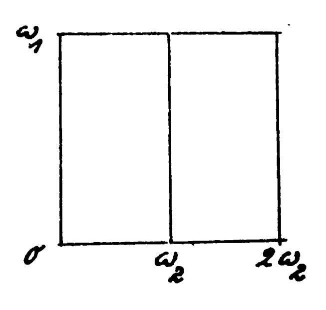
$$\sqrt{\wp(u) - e_1}$$

das nebenstehende Parallelo-

gramm.)

Unsere Ausdrücke entstehen daher durch eine Transformation zweiter Ordnung.

Andrerseits sind die Ausdrücke



$$\sqrt{e_i - e_k}$$

eindeutige Functionen von ω_1, ω_2; es sind Modulformen von der -1ten Dimension und der 4ten Stufe.

3. Die Jacobi'schen Functionen setzen sich aus den eben genannten Bestandteilen in folgender Weise zusammen.

$$\sin am(z, k) = \sqrt{e_1 - e_3} : \sqrt{\wp(u) - e_3}$$
$$\cos am(z, k) = \sqrt{\wp(u) - e_1} : \sqrt{\wp(u) - e_3}$$
$$\Delta\, am(z, k) = \sqrt{\wp(u) - e_2} : \sqrt{\wp(u) - e_3}.$$
$$z = \sqrt{e_1 - e_3} \cdot u$$

Sie sind bez. von der 4ten, 2ten und 2ten Stufe. Dieser Umstand sowie die vorstehenden Formeln zeigen deutlich, wie unsymmetrisch und von unserm Standpunkte un-

zweckmässig die Jacobi'schen Functionen gewählt sind.

Ferner aber aus den Entwickelungen der „Modulfunctionen":

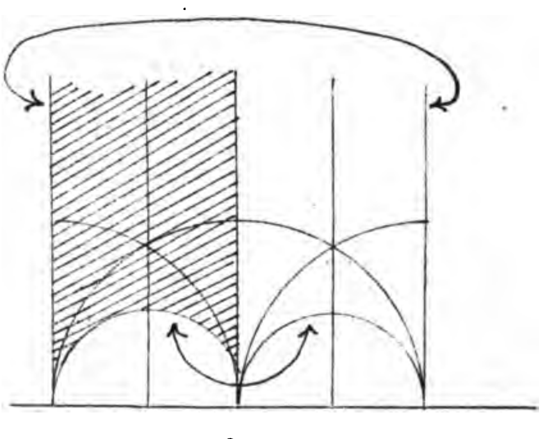
1. Die Hauptcongruenzgruppe zweiter Stufe kann uns als Modell für die Untersuchung der höheren Congruenzgruppen dienen; sie ist in diesem Sinne Abschnitt II Cap 4 der „Modulfunctionen" ausführlich besprochen. Ihr Index ist gleich 6; die Hauptcongruenzgruppe 2' Stufe umfasst sozusagen den 6ten Teil der Substitutionen der Gesammtgruppe.

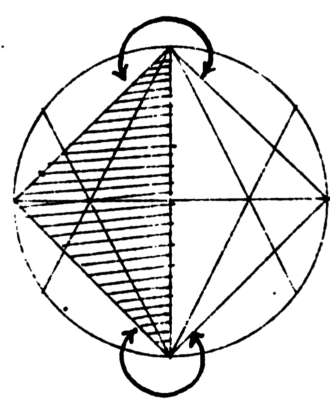
Dementsprechend besteht der Discontinuitätsbereich aus 6 Discontinuitätsbereichen der Gruppe $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$ bez. aus 12 Discontinuitätsbereichen der „erweiterten" Gruppe.

In der ω-Ebene kann man ihn in der aus der nebenstehenden Figur ersichtlichen Weise abgrenzen

Viel übersichtlicher aber wird seine Gestalt in der a, b, c-Ebene,

wie überhaupt die geradlinige Figur vor der Kreisbogenfigur entschieden den Vorzug verdient. Hier ist nämlich der Discontinuitätsbereich zweiter Stufe ein Quadrat, welches sich aus den beiden in der Mittellinie zusammenstossenden „Constructionsdreiecken" zusammensetzt. Durch die „Hülfslinien" zerfallen letztere in je 6 Elementardreiecke entsprechend den 2×6 Kreisbogendreiecken der ω-Ebene.





Wir erwähnten bereits, dass das Doppelverhältniss λ eine Modulfunction der 2ten Stufe ist; λ nimmt daher

alle seine Werte in dem genannten Bereiche an. Darüber hinaus zeigt sich nun aber, dass <u>λ im Discontinuitätsbereiche zweiter Stufe jeden Wert nur einmal annimmt</u>. Man kann daher diesen Bereich geradezu als conformes Abbild der λ-Ebene betrachten; der positiven λ-Halbebene entspricht dabei die eine (in den Figuren schraffirte) Hälfte dieses Bereiches. <u>In Folge dessen wird die Function $\lambda(\omega)$ die charakteristische Invariante unserer Untergruppe</u> in demselben Sinne, wie $J(\omega)$ die characteristische Invariante der Gesammtgruppe liefern. Wir können nämlich aus der Gleichung $\lambda(\omega) = \lambda(\omega')$ sofort auf die folgende Gleichung schliessen:

$$\omega' = \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}, \text{ wo } \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \text{ mod } 2.$$

In der That nimmt $\lambda(\omega)$ an denjenigen Stellen, welche vermöge der Hauptcongruenzgruppe 2ter Stufe

aequivalent sind, und was das Wichtigere ist, nur an diesen Stellen die gleichen Werte an.

2. Bei den Congruenzgruppen höherer Stufen werden wir in entsprechender Weise zunächst den Index der Untergruppe, dann ihren Discontinuitätsbereich bestimmen. Letzterer setzt sich aus einzelnen Discontinuitätsbereichen der Gesammtgruppe zusammen, wobei die Anzahl derselben durch den Index der Untergruppe angegeben wird.

Hierbei greift eine sehr wichtige Unterscheidung Platz, welche an die Zuordnung der Randcurven anknüpft. Die Pfeile, welche wir an unsern Figuren anbringen, weisen darauf hin, dass wir die Discontinuitätsbereiche unserer Gruppen als geschlossene Flächen aufzufassen haben, indem wir uns die zugeordneten Randcurven zusammengebogen denken. Dabei kann sich entweder <u>eine geschlossene Fläche vom Character der Kugelfläche ($p=0$)</u> ergeben, oder

<u>eine Fläche von höherem Zusammenhange.</u> Die Riemann'sche Theorie der algebraischen Functionen lehrt nun, dass die Flächen der ersteren Art conform auf die Kugel bez. die schlichte Ebene abgebildet werden können. Bezeichnen wir mit μ eine complexe Variable, welche in gewöhnlicher Weise in dieser Ebene ausgebreitet ist, so stellt $\mu(\omega)$ eine Modulfunction dar, welche in dem betr. Discontinuitätsbereiche der ω-Ebene jeden Wert nur einmal annimmt. Wir bezeichnen eine solche Function als <u>Hauptmodul</u>. <u>Die fundamentale Eigenschaft des Hauptmoduls ist die, dass jede andere Modulfunction des betr. Bereiches eine rationale Function des Hauptmoduls ist.</u> Dahingegen kann man der Riemann'schen Theorie zufolge die Flächen mit $p > 0$ nicht auf die schlichte Ebene, sondern nur auf eine mehrfach überdeckte Ebene, eine Riemann'sche Fläche abbilden, welche

zu derselben Zahl p gehört. Die einzelne Stelle der Riemann'schen Fläche wird aber nicht durch *eine* complexe Variable μ, sondern nur durch die Zusammenstellung *zweier* Variabler (μ, μ') festgelegt, welche algebraisch von einander abhängen. *Dementsprechend werden die Modulfunctionen eines Bereiches von höherem Zusammenhange nicht mehr rational durch eine, sondern durch zwei Functionen $(\mu(\omega), \mu'(\omega))$ ausdrückbar, zwischen denen eine algebraische Relation besteht.* Im Falle $p > 0$ gibt es also keinen Hauptmodul. Diese fundamentalen Begriffe sind im 8ten Abschnitte der „Modulf." auseinandergesetzt. Sie treten natürlich nicht nur bei den Modulfunctionen, sondern überhaupt bei den eindeutigen Functionen eines beliebigen Fundamentalbereiches, also auch beispielsweise bei den elliptischen Functionen in ihrer Abhängigkeit von ω, in Kraft.

Die bisher von uns betrachteten Fundamentalbereiche liefern in der That bereits geschlossene Flächen mit $p=0$ und $p>0$. Zu der ersteren Kategorie gehört der Fundamentalbereich der Gesammtgruppe der $\begin{pmatrix}\alpha\beta\\ \gamma\delta\end{pmatrix}$ Substitutionen und der der Hauptcongruenzgruppe 2ter Stufe. Dementsprechend lernten wir in den Functionen $J(\omega)$ und $\lambda(\omega)$ Modulfunctionen kennen, welche in dem bez. Fundamentalbereichen jeden Wert nur einmal annehmen. Alle andern Modulfunctionen des betr. Bereiches lassen sich durch diese „Hauptmoduln" rational ausdrücken, wie wir bereits sagten. Andrerseits giebt das Periodenparallelogramm der u-Ebene bei der Zusammenbiegung eine geschlossene Fläche vom Character des Ringes, eine Fläche mit $p=1$. Dementsprechend giebt es keine Function, welche im Periodenparallelogramm jeden Wert nur einmal annimmt. Dagegen kennen wir

2 Functionen $\wp(u)$ und $\wp'(u)$, welche zusammengenommen die einzelnen Punkte des Periodenparallelogrammes in eindeutiger Weise festlegen und welche dieses conform auf die Riemann'sche Fläche $(\wp, \wp')$ abbilden. Wollen wir die allgemeineren doppeltperiodischen Functionen des Periodenparallelogramms rational darstellen, so brauchen wir dazu beide Functionen $\wp$ und $\wp'$!

3. Bei der Untersuchung der folgenden Stufen (d. h. der jedesmaligen <u>Hauptcongruenzgruppen</u>) zeigt sich dass <u>die Fundamentalbereiche der 3ten, 4ten, 5ten Stufe noch $p = 0$, die der höheren Stufen aber $p > 0$ besitzen</u>. Daher haben wir bei der 3ten, 4ten und 5ten Stufe Hauptmoduln, welche bez.

$$\mu(\omega),\ o(\omega),\ \xi(\omega)$$

heissen, und durch welche sich die übrigen Modulfunctionen der betr. Fundamentalbereiche rational ausdrücken. In's Besondere kann die

Function $\mathcal{F}(w)$ selbst als Modulfunction der 2ten, 3ten 4ten und 5ten Stufe aufgefasst werden. Daher ist $\mathcal{F}$ eine rationale Function sowohl von λ, μ, o als von ξ.

Umgekehrt hängen diese Functionen ihrerseits algebraisch von $\mathcal{F}$ ab. Die Art dieser Abhängigkeit ist von anderer Seite her wohlbekannt. Es sind nämlich die Irrationalitäten, welche sich bei der Darstellung von λ, μ, o und ξ durch $\mathcal{F}$ ergeben, keine anderen, als die Irrationalitäten der regulären Körper u. zw. ist
$\lambda(\mathcal{F})$ die Dieder-Irrationalität für $n=3$.
$\mu(\mathcal{F})$ – Tetraeder – "
$o(\mathcal{F})$ – Oktaeder – "
$\xi(\mathcal{F})$ – Ikosaeder – " .

Es ist dies ein sehr merkwürdiger Zusammenhang, dem wir leider nicht weiter nachgehen können.

4. Die Tendenz der „Modulfunctionen" ist nun geradezu, neben dem $\mathcal{F}$ der Weierstrassischen und dem λ der Jacobi'schen Theorie die Moduln hö-

herer Stufen, welche sonst in der Litte-
ratur ziemlich vernachlässigt werden,
also ins Besondere die Tetraeder-, die
Octaeder- und die Ikosaeder-Irra-
tionalität systematisch zu berücksich-
tigen. Dieselbe Forderung werden wir
auch nach der zahlentheoretischen
Seite stellen. Man sollte die Theorie
der singulären elliptischen Gebilde
nicht einseitig für die J und λ ent-
werfen, wie es bisher geschehen ist, son-
dern sollte auch die μ, o und ξ
in Betracht ziehen. Das kann nicht
schwer sein und wird doch viel
Interesse bieten. Quadratische Formen
(a, b, c) werden dabei nur insofern
als aequivalent gelten, als sie
durch Substitutionen $\binom{\alpha\ \beta}{\gamma\ \delta}$ in ein-
ander übergehen, die modulo 3,
bez. 4 oder 5 zur Identität congru-
ent sind. Dieselbe Festsetzung ist
in Bezug auf den Zahlenmodul
2 bereits von Kronecker u. A. über-
all da getroffen worden, wo es
sich um $\lambda(\omega)$ handelt.

5. Der Uebergang von Modulfunctionen niederer zu solchen höherer Stufe kann in besonderen Fällen durch Wurzelziehen bewerkstelligt werden. Diese Bildungsweise der Modulfunctionen ist von besonderer Wichtigkeit; sie soll daher an einzelnen Beispielen erläutert werden.

Ausgehend von dem Legendre'schen Modul λ bildet man

$$\sqrt[2]{\lambda}\ ,\ \sqrt[4]{\lambda}\ ,\ \sqrt[8]{\lambda}.$$

Es zeigt sich, dass diese Functionen in der ω-Ebene eindeutig und Modulfunctionen bez. von der

4ten, 8ten, 16ten Stufe

sind. Ferner zeigt sich, dass man auch aus dem Ausdrucke $\lambda(\lambda-1)$ eine Reihe von Wurzeln ausziehen kann, so dass sich Congruenzmoduln ergeben. Es werden nämlich

$$\sqrt[2]{\ }, \sqrt[3]{\ }, \sqrt[4]{\ }, \sqrt[6]{\ }, \sqrt[8]{\ }, \sqrt[12]{\ }, \sqrt[24]{\lambda(\lambda-1)}$$

eindeutige Modulfunctionen

Bez. von der

4, 6, 8, 12, 16, 24, 48

Stufe. Dieselben treten ebenfalls in der Litteratur ausserordentlich viel auf, insbesondere kommt $\sqrt[24]{\lambda(\lambda-1)}$ bei Weber unter der Bezeichnung $f(\omega)$ vor.

In ähnlicher Weise verfährt man mit der Discriminante Δ, welche eine Modulform der ersten Stufe und, wie aus der Darstellung

$$\Delta = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{12} r \prod (1-r^m)^{24}$$

hervorgeht, der -12ten Dimension ist. Man betrachtet nämlich die Modulformen $\Delta, \sqrt[2]{\Delta}, \sqrt[3]{\Delta}, \sqrt[4]{\Delta}, \sqrt[6]{\Delta}, \sqrt[12]{\Delta}$ von der Dimension $-12, -6, -4, -3, -2, -1$ und der Stufe $1, 2, 3, 4, 6, 12$. –

6. Wir suchen uns von dem der Bildung dieser Ausdrücke zu Grunde liegenden Princip, soweit es in Kürze geschehen kann, Rechenschaft zu geben. Dass man zunächst bei Δ mit dem Wurzelzeichen nur bis $\sqrt[12]{\Delta}$ gehen darf,

sofern man eindeutige Functionen von ω_1, ω_2 erhalten will, ist klar, da ja $\sqrt[12]{\Delta}$ bereits von der Dimension -1 ist. Dass man aber wirklich soweit gehen darf, ohne dass man zu vieldeutigen Functionen kommt, ergiebt sich aus der vorstehenden Productdarstellung von Δ, die doch für den ganzen in Betracht kommenden Bereich $|r| < 1$ convergirt. Wir können hier nämlich die 2te, 3te, 4te, 6te, 12te Wurzel teils in rationaler Form, teils bei dem Factor r in transcendenter Form ausziehen, indem

$$\text{z. B.} \quad r^{1/12} = e^{\frac{2i\pi\omega_1}{12\omega_2}} = e^{\frac{i\pi\omega}{6}}$$

eine eindeutige Function von ω_1 und ω_2 wird. Was die angegebenen Stufenzahlen betrifft, so müssen wir uns mit einem Hinweise auf die „Modulf." (Bd. I pg 623) begnügen.

Bei den Ausdrücken in λ liegen die Verhältnisse etwas anders.

Man erkennt nämlich (aus der Dreieckseinteilung der ω-Ebene) dass jede beliebige Wurzel aus λ eine eindeutige Function von ω darstellt. Das gilt in's Besondere auch für den $\lg\lambda$, den wir ja als eine unendlich hohe Wurzel auffassen können. Wir können daher den Ausdruck $\sqrt[r]{\lambda}$ (r beliebig) als eine Modulfunction bezeichnen. Derselbe stellt aber im Allgemeinen keinen Congruenzmodul dar. Vielmehr beweist man (vergl. Modulf. Bd I pg. 656), dass nur im Falle $r = 2, 4$ und 8 Congruenzmoduln der oben angegebenen Stufenzahlen erhalten werden. Desgleichen ergiebt sich hinsichtlich der Grösse $\lambda(\lambda-1)$, dass nur die oben angegebenen Wurzeln Congruenzmoduln liefern.

Noch möge der Zusammenhang von $\sqrt[r]{\lambda}$ und $\sqrt[r]{\lambda(\lambda-1)}$ mit der Discriminante Δ angeführt werden. Man findet in dieser Hinsicht (vergl. Modulf. II pg 66) die Darstel-

lung:

$$\sqrt[8]{-\lambda} = \sqrt[24]{\frac{\Delta(\frac{\omega_1}{2}, \omega_2)}{\Delta(\omega_1, \frac{\omega_2}{2})}}, \quad \sqrt[24]{\lambda(\lambda-1)} = \sqrt[24]{\frac{16\,\Delta(\omega_1, \omega_2)}{\Delta(\omega_1, \frac{\omega_2}{2})}};$$

dieselbe zeigt, dass $\sqrt[8]{-\lambda}$ und $\sqrt[24]{\lambda(\lambda-1)}$ auf Wurzeln aus transformirten Δ zurückkommen.

7. Für die hier betrachteten Wurzelfunctionen scheint eine eigene Terminologie am Platze. Wir sagten, dass $\sqrt[r]{\Delta}$ ($r = 2, 3, 4, 6, 12$) sich bei den Substitutionen der 1ten Stufe im Allgemeinen verändert und daher einer höheren Stufe angehört. Die Aenderung kann aber nur in dem Hinzutreten von 2., 3., 4., 6., 12ten Einheitswurzeln bestehen. Diese Grössen stehen daher mit der 1ten Stufe in einem engeren Zusammenhange als die allgemeinen Modulfunctionen der betr. Stufe. Wir wollen diese Grossen <u>der 1ten Stufe adjungirt</u> nennen. Eben so werden wir die angegebenen Wurzeln aus λ und $\lambda(\lambda-1)$ <u>der</u>

2ten Stufe adjungirt nennen, weil sie bei allen Substitutionen der 2ten Stufe sich nur um Einheitswurzeln verändern. Auch diese Auffassung entspricht der Riemann'schen Theorie der algebraischen Functionen, in welcher in der That neben den Functionen, die auf einer Riemann'schen Fläche eindeutig sind, in erster Linie solche vieldeutige Functionen der Fläche betrachtet werden, die sich bei Umläufen um Einheitswurzeln ändern.

Den Schluss dieser Vorlesung mögen einige Bemerkungen zu dem Werke über Modulfunctionen bilden, welche die Stellung der Verfasser zu dem in dem Buche verfolgten Plane wiedergeben.

Das Werk beschäftigt sich ja fast ausschliesslich mit den Modulfunctionen, betrachtet also die elliptischen Functionen durchaus in ihrer Abhängigkeit von den ω, während die Abhängigkeit von u

zurückgedrängt wird. Hierin wollen Sie nur einen Akt ausgleichender Gerechtigkeit erblicken. Während nämlich die bisherigen Darstellungen die Abhängigkeit der elliptischen Functionen von den Perioden in ungebührlicher Weise vernachlässigten, schien es vorteilhaft, einmal diese Seite der Theorie vornehmlich hervorzukehren. Schliesslich muss die allgemeine Auffassung die sein, dass die elliptischen Functionen solche dreier Variablen u, ω_1, ω_2 sind, wobei man nur nach Bedürfnis bald die eine, bald die andere dieser Variabeln voranstellt.

Eine zweite Bemerkung soll sich auf die dem Buche zu Grunde liegende Systematik, auf die Einteilung nach Untergruppen und zugehörigen Invarianten, insbesondere also die Stufeneinteilung beziehen. Diese Systematik hat gestattet, eine grosse Reihe der bei den elliptischen Functionen hervortretenden Beziehungen un-

der einheitliche und übersichtliche Gesichtspunkte zu bringen und in der Fülle der Formeln Ordnung zu stiften. Aber die Natur der Dinge ist allemal reicher als jedes noch so vollkommene System. Auch hier bleibt ein Rest von elliptischen Beziehungen übrig, der in das System nicht hineinpassen will, nach Aufrichtung des Systems werden gerade diese Beziehungen ein besonderes Interesse beanspruchen. Denn in ihnen liegen die Keime weiterer Entwickelung.

Dies möge nach einer Seite hin näher ausgeführt werden. Wir wollen die Produktformel für die Discriminante folgendermassen schreiben:

$$\Delta = \left(\frac{2}{\omega_2}\right)^{12} \varphi(\omega), \quad \varphi(\omega) = r \, \Pi (1 - r^m)^{24}$$

und die Function $\varphi(\omega)$ in's Auge fassen. Dieselbe ist in unserer Terminologie überhaupt keine Modulfunction; denn sie ändert

sich bei sämmtlichen Substitutionen der Modulgruppe. Da Δ selbst ungeändert bleibt, so haben wir in der That:

$$\varphi\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right)=\left(\frac{\gamma\omega_2+\delta}{2\pi}\right)^{12}\Delta(\omega_1,\omega_2)$$
$$=(\gamma\omega+\delta)^{12}\cdot\varphi(\omega).$$

<u>Allgemeiner werden wir nun solche Functionen in Betracht ziehen, welche sich bei unsern Substitutionen um irgend eine Potenz von $\gamma\omega+\delta$ ändern, wobei wir auch gebrochene Potenzen nicht ausschliessen.</u> Es zeigt sich, dass eine solche Function sehr wohl in der Variabeln ω eindeutig sein kann, was wir allerdings festhalten wollen. Sei nämlich

$$\phi_\nu(\omega)=\sqrt[\nu]{\varphi(\omega)}=r^{1/\nu}\prod(1-r^m)^{\frac{24}{\nu}}=e^{\frac{2i\pi\omega}{\nu}}\cdot\prod(1-r^m)^{\frac{24}{\nu}}.$$

Hier können wir jeden Factor des Productes nach dem Binom entwickeln und dann das ganze

Product in eine Potenzreihe nach r ordnen, die für $|x| < 1$ convergirt und also eine in der positiven ω-Halbebene eindeutige Function ergibt. Während wir von dem früheren Standpunkte aus bei Δ nur die Wurzeln $r = 2, 3, 4, 6, 12$ zuliessen, kann r jetzt jede Zahl bedeuten. Die neue Function $\phi_r(\omega)$ genügt der Functionalgleichung:

$$\phi_r\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = (\gamma\omega+\delta)^{\frac{12}{r}}\ \phi_r(\omega).$$

Wir sehen uns durch diese Gleichung vor ein merkwürdiges Problem gestellt. Wie soeben gezeigt wurde, haben nämlich die Ausdrücke ϕ_r ganz bestimmte eindeutige Werte. Daher muss auch der an sich im Allgemeinen r-wertige Ausdruck $(\gamma\omega+\delta)^{12/r}$ in unserer Gleichung eine eindeutig-bestimmte Bedeutung haben. Es gilt also, aus den sämmtlichen möglichen Werten dieses Ausdrucks in jedem

Falle denjenigen auszusondern, der in der vorstehenden Gleichung gemeint ist. Es kommt dies darauf hinaus, dass wir jeder Substitution $\binom{\alpha\ \beta}{\gamma\ \delta}$ eine Einheitswurzel zuordnen, also auf eine durchaus zahlentheoretische Frage.

In dem Werke über Modulf. ist diese Frage bei Seite gelassen, dagegen spielt sie anderweitig in der Litteratur eine wichtige Rolle, nämlich im Falle $\nu = 8$ in der Theorie der ϑ-Functionen und im Falle $\nu = 24$ in den Arbeiten von Dedekind und Weber, wo die betr. Function $\sqrt[24]{\varphi(\omega)}$ mit $\eta(\omega)$ bezeichnet wird.

Nehmen wir geradezu $\nu = \infty$, so tritt $\lg \varphi(\omega)$ als eine wichtige Modulfunction im erweiterten Sinne in die Betrachtung ein; auch sie ist in ω eindeutig. Die Functionalgleichung

$$\lg \varphi\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = 12 \lg(\gamma\omega+\delta) + \lg \varphi(\omega)$$

setzt wieder eine an sich vieldeu-

tige (u. zw. hier unendlich vieldeutige) Function mit eindeutigen Functionen in Beziehung. Es entsteht also die interessante Frage, nach welchem Gesetz aus den unendlich vielen Werten des Logarithmus derjenige ausgesucht werden muss, welcher der vorstehenden Gleichung genügt.

In der Litteratur tritt die Function $\lg \eta(\omega)$ beispielsweise in der Kronecker'schen Grenzformel auf, welche wir im Sommer kennen lernen werden.

Hiermit schliessen wir unsere kurze Digression über die elliptischen Functionen, bez. elliptischen Modulfunctionen. Wir haben ja nichts Vollständiges geben können. Aber vielleicht sind unsere Bemerkungen doch geeignet, soweit in die Theorie einzuführen, dass die erste Schwierigkeit, welche der äusserst weitschichtige Stoff darzubieten pflegt, überwunden ist.

An Ihnen wird es nun sein, wäh-
rend der Osterferien den so-gewon-
nenen Ansatz durch speciellere
Studien zu entwickeln. In der
That werden wir im Sommersemester
gar nichts machen können, wenn es
uns nicht gestattet sein soll, hier
und dort auf die Theorie der
elliptischen Functionen zu recur-
riren.

